



PERBANDINGAN MODEL EKSPONENSIAL, HIPERBOLIK, DAN LOGISTIK UNTUK PROYEKSI POPULASI KABUPATEN MALANG TAHUN 2035

Rihha Datul Azizah¹⁾, Kresna Oktafianto²⁾

^{1,2)}*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas PGRI Ronggolawe
email: rihharihha4@gmail.com

Abstrak: Kabupaten Malang di Jawa Timur mengalami peningkatan populasi yang pesat, dengan jumlah penduduk tercatat sebanyak 2.490.878 jiwa pada tahun 2012 dan 2.755.438 jiwa pada tahun 2025. Penelitian ini menggunakan tiga model matematika, yakni eksponensial, hiperbolik, dan logistik, untuk memprediksi jumlah penduduk hingga tahun 2035. Estimasi parameter yang didasarkan pada solusi analitis dengan memanfaatkan dua titik data (tahun 2012 dan 2025) untuk setiap model digunakan untuk menganalisis data BPS dari tahun 2012 hingga 2025, kemudian nilai MAPE digunakan untuk keperluan validasi. Selain menghitung daya tampung (K) berdasarkan luas wilayah aktual, penelitian ini menarik karena membandingkan ketiga model tersebut (eksponensial, hiperbolik, dan logistik) secara bersamaan dalam satu wilayah studi (Kabupaten Malang), sebuah pendekatan yang belum banyak dilakukan sebelumnya. Dengan menggunakan luas wilayah Kabupaten Malang ($3.534,86 \text{ km}^2$) dan asumsi kebutuhan lahan 100 m^2 per orang, daya tampung (K) untuk model logistik ditetapkan sebesar 35.348.600 jiwa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga model memiliki nilai MAPE yang sangat baik, yaitu di bawah 0,6%. Model hiperbolik (0,33797%) dan eksponensial (0,57625%) memiliki tingkat akurasi yang lebih rendah dibandingkan model logistik (MAPE 0,30892%). Prediksi jumlah penduduk untuk tahun 2035 adalah 2.960.052 jiwa untuk model logistik, 2.940.830 jiwa untuk model eksponensial, dan 2.939.370 jiwa untuk model hiperbolik. Model logistik menghasilkan nilai MAPE terendah dibandingkan dengan dua model lainnya.

Kata Kunci: Proyeksi Populasi; Kabupaten Malang; Model Eksponensial; Model Hiperbolik; Model Logistik

Abstract: East Java's Malang Regency has had rapid population increase, with 2,490,878 residents in 2012 and 2,755,438 in 2025. Three mathematical models there is exponential, hyperbolic, and logistic are used in this work to predict the population until 2035. Parameter estimate based on an analytical solution incorporating two data points (2012 and 2025) for each model was used to examine BPS data from 2012 to 2025. MAPE was then used for validation. In addition to calculating carrying capacity (K) based on actual land area, this research is interesting in that it compares three models (exponential, hyperbolic, and logistic) simultaneously within a single study area (Malang Regency), which has not received much attention. Using the size of Malang Regency ($3,534.86 \text{ km}^2$) and an assumption of 100 m^2 per person, the carrying capacity (K) for the logistic model was determined to be 35,348,600 people. According to the findings, all three models had an exceptional MAPE of less than 0.6%. The hyperbolic (0.33797%) and exponential



(0.57625%) models were less accurate than the logistic model (MAPE 0.30892%). The population forecasts for 2035 are logistic (2,960,052), exponential (2,940,830), and hyperbolic (2,939,370). The logistic model produced the lowest MAPE score when compared to the other two models.

Keywords: *Population Projections; Malang Regency; Exponential Model; Hyperbolic Model; Logistic Model*

PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk merupakan salah satu faktor utama yang sangat memengaruhi perencanaan pembangunan suatu daerah (Arsandi dkk., 2017). Bagi Kabupaten Malang, sebagai wilayah dengan dinamika demografi yang cukup tinggi di Provinsi Jawa Timur, ketersediaan proyeksi penduduk yang akurat menjadi sangat penting guna mendukung penyusunan kebijakan di berbagai sektor seperti pendidikan, kesehatan, perumahan, infrastruktur, ketenagakerjaan, dan lingkungan hidup (Wulandari & Benty, 2017).

Data historis jumlah penduduk Kabupaten Malang yang bersumber dari Badan Pusat Statistik (BPS) menunjukkan tren pertumbuhan yang konsisten. Pada tahun 2012, jumlah penduduk tercatat sebanyak 2.490.878 jiwa dan meningkat menjadi 2.755.438 jiwa pada tahun 2025. Dengan laju pertumbuhan tahunan rata-rata sekitar 0,75–0,78%. Peningkatan jumlah penduduk disebabkan oleh kelahiran alami dan migrasi yang dipicu oleh tumbuhnya kawasan industri, agrowisata, serta institusi pendidikan tinggi. Kondisi ini menekan sektor permukiman, transportasi, layanan kesehatan dan pendidikan, serta pengelolaan lingkungan (Pamungka & Putri, 2024). Hal ini menunjukkan bahwa proyeksi populasi tidak cukup hanya pendekatan statistik, melainkan memerlukan model matematika terapan yang akurat, terukur, dan dapat dipertanggungjawabkan secara ilmiah.

Berbagai penelitian sebelumnya telah banyak menggunakan model matematika untuk memproyeksikan jumlah penduduk. Model Eksponensial sering digunakan karena kesederhanaannya dalam menggambarkan pertumbuhan geometrik (Febdian, 2013). Model Logistik dikembangkan untuk memperhitungkan batas daya dukung lingkungan (*carrying capacity*), sehingga lebih realistis untuk proyeksi jangka Panjang (Rosiyanti, 2022). Sementara itu, Model Hiperbolik digunakan untuk menggambarkan pola pertumbuhan yang melambat secara bertahap (Prihandono dkk., 2024). Di Indonesia, banyak kajian proyeksi penduduk daerah telah menerapkan ketiga model ini dengan tingkat akurasi yang baik.

Meskipun demikian, perbandingan antara model eksponensial, hiperbolik, dan logistik dalam wilayah studi yang sama masih jarang dilakukan, karena sebagian besar penelitian sebelumnya umumnya hanya menerapkan satu atau dua model secara terpisah pada wilayah tertentu seperti model eksponensial dan logistik untuk wilayah Jawa Barat (Nurkholipah dkk., 2017) dan model logistik untuk Kabupaten Banyumas (Rosiyanti, 2022), Kabupaten Sumenep (Nurmadhani & Faisol, 2022) atau Kabupaten Lombok Timur (Khairunnisa, 2025). Selain itu, nilai daya tampung (K) dalam model logistik pada penelitian terdahulu ditetapkan berdasarkan



asumsi tanpa secara khusus mempertimbangkan luas wilayah geografisnya (Al Haq & Oktafianto, 2026). Penelitian ini mengisi kekosongan tersebut dengan membandingkan tiga model matematika yang divalidasi menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), serta menghitung daya dukung menggunakan data luas lahan aktual Kabupaten Malang. Tiga model penelitian ini menggunakan data historis populasi Kabupaten Malang (2012–2025) yang merupakan kumpulan data yang belum dikaji secara mendalam dengan penilaian komparatif yang konsisten terhadap tiga model matematika dalam satu wilayah, serta penerapan hasil proyeksi untuk mendukung perencanaan pembangunan spesifik wilayah bagi Kabupaten Malang.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk melakukan proyeksi jumlah penduduk Kabupaten Malang hingga tahun 2035 menggunakan tiga model matematika tersebut. Secara khusus, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis tren pertumbuhan penduduk berdasarkan data historis BPS tahun 2012–2025, membandingkan akurasi ketiga model melalui nilai MAPE, dan memberikan rekomendasi model proyeksi yang paling sesuai untuk Kabupaten Malang.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan data sekunder jumlah penduduk Kabupaten Malang tahunan periode 2012–2025 yang diperoleh dari publikasi resmi BPS dan Provinsi Jawa Timur. Data yang digunakan merupakan data agregat lengkap tanpa penarikan sampel, mengingat ketersediaan data tahunan yang sudah komprehensif. Proses penelitian meliputi pengumpulan data populasi, analisis awal pola pertumbuhan, estimasi parameter untuk masing-masing model, proyeksi populasi menggunakan parameter yang diperoleh, validasi hasil proyeksi terhadap data aktual BPS.

Parameter ketiga model diestimasi secara analitis dengan menyelesaikan bentuk integral dari setiap persamaan diferensial menggunakan dua titik data historis sebagai syarat batas: populasi pada tahun 2012 (P_0) dan 2025 (P_t). Hal ini memungkinkan penentuan laju pertumbuhan (r) secara langsung tanpa memerlukan iterasi numerik. Daya tampung (K) untuk model logistik ditentukan terlebih dahulu berdasarkan luas wilayah, kemudian nilai r diestimasi menggunakan prosedur yang sama. Proyeksi dari masing-masing model dibandingkan dengan data aktual dari BPS untuk tahun yang sama guna menghitung MAPE. Microsoft Excel digunakan untuk seluruh estimasi parameter, proyeksi populasi, dan perhitungan evaluasi MAPE. Penggunaan Model Eksponensial, Model Hiperbolik, dan Model Logistik dalam penelitian ini dijelaskan sebagai berikut :

Model Eksponensial

Model pertumbuhan eksponensial pertama kali diperkenalkan oleh Thomas Malthus pada tahun 1798 sebagai kerangka dasar untuk memprediksi dinamika populasi (Khairunnisa, 2025). Menurut hukum malthus yang juga dikenal sebagai model pertumbuhan eksponensial, laju pertumbuhan suatu populasi (mikroba, bakteri, serangga, manusia maupun hewan)



berbanding lurus dengan besarnya populasi pada waktu tersebut (Khairunnisa, 2025). Berikut adalah persamaan untuk model eksponensial :

$$\frac{dP}{dt} = rP(t) \quad (1)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (1), dengan kondisi awal $P(0)$, dengan memisahkan variable dan melakukan intregasi, didapatkan :

$$\frac{dP}{p} = rP(t) \quad (2)$$

$$\int \frac{dP}{p} = \int rPt \quad (3)$$

$$\ln P = rt + C \quad (4)$$

$$p(t) = e^{rt+c} \quad (5)$$

Diasumsikan $e^c = A$:

$$p(t) = Ae^{rt} \quad (6)$$

Dengan kondisi awal $P(0)$, disubtitusikan ke persamaan (6) :

$$P(0) = Ae^{r0} = A \quad (7)$$

Sehingga diperoleh model eksponensial :

$$P(t) = P(0)e^{rt} \quad (8)$$

Dimana :

$P(t)$: Populasi pada waktu t

P_0 : Populasi awal (t_0)

r : Laju pertumbuhan penduduk per tahun

t : Waktu (tahun)

Model Hiperbolik

Model hiperbolik adalah model pertumbuhan populasi yang mengalami percepatan di awal dan berpotensi meledak (divergen) pada suatu waktu tertentu (Salsabila dkk.,). Artinya,



laju pertumbuhan populasi sebanding dengan kuadrat dari populasi saat itu (bukan sebanding dengan populasi seperti pada model eksponensial) (Salsabila dkk.), Asumsi dasar:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P^2 \quad (9)$$

Dengan kondisi awal $P(0) = P_0$, dengan memisahkan variable dan melakukan intregasi :

$$\int P^{-2} dP = \int r dt \quad (10)$$

$$-\frac{1}{P} = rt + C \quad (11)$$

Ketika $t = 0, P = P_0$ disubstitusikan ke persamaan (11), sehingga:

$$-\frac{1}{P} = rt - \frac{1}{P_0} \quad (12)$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_0} - rt \quad (13)$$

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - rP_0t} \quad (14)$$

Sehingga diperoleh model hiperbolik :

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - rt} \quad (15)$$

Dimana :

$P(t)$: Populasi pada waktu t

P_0 : Populasi awal (t_0)

r : Laju pertumbuhan penduduk per tahun

t : Waktu (tahun)

Model Logistik

Model logistik adalah model matematika yang digunakan untuk memprediksi perubahan jumlah populasi terhadap waktu dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) (Anggreini, 2018). Model ini mengasumsikan bahwa pertumbuhan populasi akan mencapai titik kesetimbangan ketika populasi mendekati kapasitas maksimum yang dapat



ditopang lingkungan (Alvendar & Baqi, 2012). Laju pertumbuhan populasi tidak lagi konstan, tetapi menurun seiring populasi mendekati K (Nurmadhani & Faisol, 2022):

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (16)$$

Dengan memisahkan variable dan melakukan integrasi :

$$\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = r dt \quad (17)$$

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K - P} dP = \int r dt \quad (19)$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = rt + C \quad (20)$$

$$\frac{P}{K - P} = C_1 e^{rt} \quad (21)$$

Disubstitusikan dengan kondisi awal $P(0) = P_0$:

$$\frac{P}{K - P} + \frac{P_0}{K - P_0} e^{rt} \quad (22)$$

Didapatkan model logistik :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}} \quad (23)$$

Mean Absolute Percentage Error

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) adalah metode perhitungan yang digunakan untuk memperoleh nilai rata-rata dari kesalahan *Absolute* (Bastomi dkk., 2021). Berikut rumus perhitungan MAPE (Salsabila dkk.):



$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|Y_t - Y'_t|}{Y_t} \times 100\% \quad (24)$$

dimana :

Y_t : Jumlah data actual pada waktu t

Y'_t : Jumlah data proyeksi pada waktu t

n : Jumlah banyaknya data

Nilai MAPE yang semakin rendah menandakan bahwa model peramalan memiliki kinerja yang baik. Sebagai tolok ukur (Maricar, 2019), terdapat rentang nilai MAPE yang disajikan dalam Tabel 1 (Bastomi dkk., 2021) berikut ini.

Tabel 1. Interpretasi Hasil MAPE

MAPE (%)	Interpretasi Akurasi Peramalan
<10 %	Sangat Baik
10 % - 20 %	Baik
20 % - 50 %	Cukup Baik
>50 %	Kurang

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Pemodelan pertumbuhan populasi adalah alat penting dalam analisis demografi untuk perencanaan pembangunan daerah. Tiga model matematika digunakan dalam kajian ini, yaitu Model Eksponensial, Model Logistik, dan Model Hiperbolik. Data populasi Kabupaten Malang dari BPS menjadi acuan. Model-model ini diestimasi menggunakan data dari tahun 2012 hingga 2025. Kemudian, akurasi dievaluasi. Setelah itu, model digunakan untuk memproyeksikan populasi hingga tahun 2035. Berikut data penduduk kabupaten malang 2012-2025 Tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Jumlah Penduduk Kabupaten Malang

Tahun	BPS
2012	2.490.878
2013	2.508.698
2014	2.527.087
2015	2.540.249
2016	2.558.300
2017	2.575.602
2018	2.592.147
2019	2.607.914
2020	2.654.448
2021	2.668.296
2022	2.685.900



Tahun	BPS
2023	2.703.175
2024	2.735.990
2025	2.755.438

Sumber: BPS Jawa Timur 2012-2025

Berdasarkan data populasi tahun 2012 ($P_0 = 2.490.878$) dan tahun 2025 ($P_t = 2.755.438$), diperoleh parameter laju pertumbuhan untuk masing-model sebagai berikut:

Model Eksponensial

Nilai parameter laju pertumbuhan (r) untuk model eksponensial didapatkan sebagai berikut:

$$r = \frac{\ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{2.755.438}{2.490.878}\right)}{13} = 0,00722$$

Setelah didapatkan nilai (r), kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (8)

$$P(t) = 2.490.878e^{0,00722(t)}$$

Hasil perhitungan proyeksi Model Eksponensial beserta nilai MAPE menggunakan software Ms Excel pada tabel 3.

Model Hiperbolik

Nilai parameter laju pertumbuhan (r) untuk Model Hiperbolik didapatkan sebagai berikut:

$$r = \frac{\left(1 - \frac{P_0}{P_t}\right)}{t} = \frac{\left(1 - \frac{2.490.878}{2.755.438}\right)}{13} = 0,00689$$

Setelah didapatkan nilai (r), kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (15):

$$P(t) = \frac{2.490.878}{1 - 0,00689(t)}$$

Hasil perhitungan proyeksi Model Hiperbolik beserta nilai MAPE menggunakan software Ms Excel pada tabel 3.

Model Logistik

Berdasarkan data luas wilayah Kabupaten Malang dari BPS (2025), luas kabupaten malang adalah $35.306.500 \text{ m}^2$. Dengan asumsi luas tempat tinggal minimum per individu 100 m^2 , maka kapasitas dukung populasi dihitung sebagai berikut (Al Haq & Oktafianto, 2026):

$$K = \frac{\text{Luas Kabupaten Malang}}{\text{Luas tempat tinggal minimum tiap individu}}$$



$$K = \frac{3.534.860.000 \text{ m}^2}{100 \text{ m}^2} = 3.534.600$$

Didapatkan nilai $K = 3.534.600$, selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (23) untuk mencari nilai r laju pertumbuhan, maka:

$$P(t) = \frac{3.534.600}{1 + (11,81339)e^{-rt}}$$
$$r = -\frac{\frac{\ln\left(\frac{3.534.600}{2.755.438} - 1\right)}{11,81339}}{13} = 0,00839$$

Pendekatan kebutuhan lahan permukiman, yang merepresentasikan luas minimum lahan terbangun (perumahan ditambah ruang sirkulasi dasar) per kapita, menjadi dasar bagi asumsi luas area hunian minimum sebesar 100 m^2 per orang. Al Haq & Oktafianto (2026) juga menggunakan pendekatan ini dalam perhitungan daya tampung penduduk untuk Kabupaten Lamongan (Al Haq & Oktafianto, 2026). Analisis sensitivitas dilakukan dengan menghitung nilai K berdasarkan tiga skenario luas lahan per individu— 80 m^2 , 100 m^2 , dan 120 m^2 —mengingat asumsi ini memengaruhi hasil model logistik. Perhitungan tersebut menghasilkan nilai K masing-masing sebesar 4.418.575, 3.534.600, dan 2.945.500 jiwa. Proyeksi populasi untuk tahun 2035 berada pada kisaran 2,95 hingga 2,97 juta jiwa dalam ketiga skenario tersebut, dengan selisih MAPE kurang dari 0,05%. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa populasi aktual Kabupaten Malang masih jauh di bawah nilai K pada ketiga skenario tersebut, yang mengindikasikan bahwa kurva logistik masih berada dalam fase pertumbuhan yang mendekati pertumbuhan eksponensial. Kondisi ini menunjukkan bahwa meskipun prediksi proyeksi jangka menengah model logistik sensitif terhadap perubahan asumsi luas lahan, nilai K absolutnya tidak demikian. Selanjutnya hasil r disubstitusikan kedalam persamaan (13), sehingga:

$$P(t) = \frac{3.534.600}{1 + (11,81339)e^{-0,00839(t)}}$$

Nilai parameter dari hasil estimasi ketiga model disajikan pada Tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Parameter

Model	Persamaan Model	Parameter r	Parameter K
Eksponensial	$P(t) = 2.490.878 e^{(0,00722t)}$	0,00722	—
Hiperbolik	$P(t) = \frac{2.490.878}{(1 - 0,00689t)}$	0,00689	—



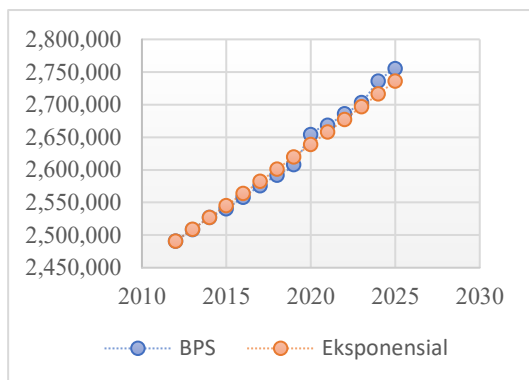
Logistik	$P(t) = \frac{3.534.600}{1 + (11,81339)e^{-0,00839(t)}}$	0,00839	3.534.600
-----------------	--	---------	-----------

Kemudian hasil proyeksi model logistic dan nilai MAPE dapat dilihat di Tabel 4 sebagai berikut:

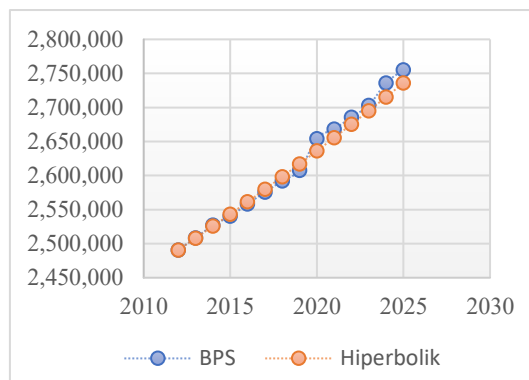
Tabel 4. Proyeksi Model Eksponensial, Hiperbolik, dan Logistik

Tahun	BPS	Model Eksponensial	Model Hiperbolik	Model Logistik
2012	2.490.878	2.490.878	2.490.878	2.490.878
2013	2.508.698	2.508.927	2.508.163	2.510.366
2014	2.527.087	2.527.106	2.525.689	2.529.995
2015	2.540.249	2.545.418	2.543.462	2.549.765
2016	2.558.300	2.563.862	2.561.487	2.569.678
2017	2.575.602	2.582.440	2.579.769	2.589.734
2018	2.592.147	2.601.152	2.598.314	2.609.934
2019	2.607.914	2.620.000	2.617.127	2.630.279
2020	2.654.448	2.638.984	2.636.215	2.650.769
2021	2.668.296	2.658.106	2.655.584	2.671.407
2022	2.685.900	2.677.367	2.675.239	2.692.191
2023	2.703.175	2.696.767	2.695.187	2.713.124
2024	2.735.990	2.716.308	2.715.435	2.734.206
2025	2.755.438	2.735.990	2.735.990	2.755.438
Nilai MAPE		0,57625%	0,33797%	0,30892%

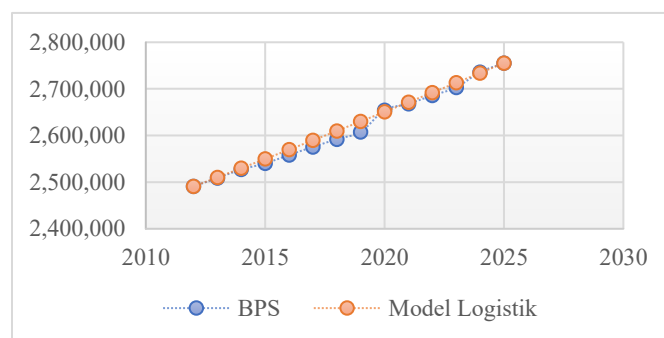
Berdasarkan Tabel 4 ketiga model (eksponensial, hiperbolik, dan logistik) menghasilkan proyeksi populasi Kabupaten Malang yang sangat mendekati data aktual BPS tahun 2012–2025, dengan nilai MAPE masing-masing 0,576%, 0,338%, dan 0,309%, semuanya termasuk kriteria “sangat baik” (<10%). Model logistik memberikan akurasi tertinggi (MAPE terkecil), diikuti hiperbolik, kemudian eksponensial. Hal ini menunjukkan bahwa model logistik paling mampu menangkap pola pertumbuhan penduduk yang sedikit melambat di akhir periode, sehingga direkomendasikan untuk proyeksi jangka pendek maupun menengah. Visualisasi grafik perbandingan tiga model tersebut diberikan pada Gambar 1-3 berikut ini.



Gambar 1. Model Eksponensial



Gambar 2. Model Hiperbolik



Gambar 3. Model Logistik

Gambar 1-3 di atas menunjukkan perbandingan proyeksi populasi tahun 2012–2025 dengan tiga model. Secara visual, ketiga model menghasilkan nilai yang hampir sama dan sangat mendekati data BPS, dengan sedikit perbedaan pada tahun akhir model logistik 2.800.000 pada 2025 lebih rendah dibanding eksponensial dan hiperbolik 2.835.000. Hal ini mengindikasikan model logistik mulai memperlambat pertumbuhan karena mempertimbangkan daya tampung, sementara eksponensial dan hiperbolik masih tumbuh linier. Meski demikian, secara keseluruhan ketiga model akurat dan dapat digunakan untuk proyeksi.

Proyeksi Populasi tahun 2026-2035

Berdasarkan parameter yang telah dihitung, ketiga model digunakan untuk memproyeksikan jumlah penduduk Kabupaten Malang pada periode 2026–2035. Hasil proyeksi disajikan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Proyeksi Populasi 2026-2035

Tahun	Model Eksponensial	Model Hiperbolik	Model Logistik
2026	2.755.815	2.755.733	2.756.858



Tahun	Model Eksponensial	Model Hiperbolik	Model Logistik
2027	2.775.784	2.775.607	2.778.047
2028	2.795.897	2.795.611	2.799.564
2029	2.816.156	2.815.748	2.821.417
2030	2.836.562	2.836.016	2.843.614
2031	2.857.115	2.856.418	2.866.163
2032	2.877.818	2.876.954	2.889.072
2033	2.898.670	2.897.624	2.912.351
2034	2.919.674	2.918.429	2.936.008
2035	2.940.830	2.939.370	2.960.052

Berdasarkan Tabel 4 proyeksi tahun 2026–2035, terlihat bahwa model logistik secara konsisten menghasilkan nilai tertinggi, diikuti model eksponensial, dan model hiperbolik terendah. Pada tahun 2035, model logistik memproyeksikan 2.960.052 jiwa, sedangkan eksponensial 2.940.830 jiwa, dan hiperbolik 2.939.370 jiwa. Perbedaan ini semakin melebar seiringnya waktu, selisih antara logistik dan eksponensial pada 2026 hanya sekitar 1.000 jiwa, namun pada 2035 mencapai hampir 20.000 jiwa. Hal ini mengindikasikan bahwa model logistik dengan parameter r dan K tertentu menghasilkan laju pertumbuhan yang sedikit lebih tinggi dalam jangka panjang dibanding dua model lainnya. Model eksponensial dan hiperbolik hampir identik, dengan hiperbolik hanya selisih sangat kecil (1.000–1.500 jiwa) di bawah eksponensial.

Pembahasan

Model logistik memiliki keunggulan dibandingkan model eksponensial dan hiperbolik karena persamaannya menyertakan faktor pembatas ($1 - P/K$). Akibatnya, laju pertumbuhan (dP/dt) secara alami menurun seiring populasi mendekati nilai K . Kurva berbentuk S (sigmoid) pada model logistik lebih sesuai dengan karakteristik pertumbuhan populasi Kabupaten Malang (2012–2025) sebaliknya, model eksponensial hanya mengasumsikan laju pertumbuhan konstan yang berbanding lurus dengan populasi tanpa batas atas dan model hiperbolik mengasumsikan laju pertumbuhan yang sebanding dengan kuadrat populasi yang berpotensi menyebabkan divergensi dalam jangka panjang. sehingga Model logistik lebih tepat dibandingkan kurva eksponensial murni atau hiperbolik yang keduanya biasanya menggambarkan pertumbuhan yang terus meningkat, mengingat data pada Tabel 2 menunjukkan adanya perlambatan pertumbuhan pada tahun-tahun terakhir periode tersebut. Hal ini menjelaskan mengapa model logistik dalam penelitian ini menghasilkan nilai MAPE terendah.

Hasil penelitian ini relevan dengan beberapa penelitian terkait yang dilakukan di wilayah lain di Indonesia. Pada penelitian Rosiyanti dkk (2022) menggunakan model logistik untuk memproyeksikan populasi Kabupaten Banyumas dan memperoleh tingkat pertumbuhan relatif sebesar 7,75% per tahun angka ini jauh lebih tinggi dibandingkan tingkat pertumbuhan untuk Kabupaten Malang yang ditemukan dalam studi ini ($r \approx 0,84\%$ per tahun menggunakan



model logistik) (Rosiyanti, 2022). Hal ini menunjukkan bahwa karakteristik pertumbuhan penduduk sangat bergantung pada dinamika masing-masing wilayah.

Penelitian menjelaskan bahwa model logistik menghasilkan nilai MAPE terendah 0,309% serupa dengan penelitian yang dilakukan di Kabupaten Sumenep oleh Nurmadhani & Faisol (2022), yang juga menemukan bahwa model logistik memberikan hasil paling mendekati data sensus dibandingkan model-model lainnya (Nurmadhani & Faisol, 2022). Validitas metode perhitungan K yang digunakan dalam studi ini semakin diperkuat oleh fakta bahwa Al Haq & Oktafianto (2026) menggunakan strategi perhitungan daya dukung berbasis wilayah yang serupa di Kabupaten Lamongan (Al Haq & Oktafianto, 2026). Kesimpulan bahwa model logistik umumnya menunjukkan kinerja lebih baik dibandingkan model eksponensial maupun hiperbolik di wilayah dengan pertumbuhan penduduk yang mulai melambat, pada umumnya didukung oleh penelitian-penelitian perbandingan tersebut.

Studi sensitivitas terhadap nilai (K) pada Model Logistik menunjukkan bahwa hasil proyeksi tahun 2035 tetap konsisten dalam kisaran 2,95–2,97 juta jiwa, meskipun nilai absolut (K) bervariasi secara signifikan dalam rentang estimasi 80–120 m² luas lahan per individu. Hal ini menunjukkan bahwa stabilitas model logistik dalam penelitian ini menunjukkan bahwa populasi aktual tetap jauh di bawah nilai (K), dibandingkan oleh presisi nilai K itu sendiri.

Namun, terdapat sejumlah keterbatasan dalam penelitian ini. Pertama, karena estimasi parameter hanya menggunakan dua titik data (tahun 2012 dan 2025), metode ini tidak dapat memperhitungkan variasi tahunan di antara kedua titik waktu tersebut, termasuk kemungkinan adanya kendala seperti perlambatan pertumbuhan akibat pandemi COVID-19 pada tahun 2020–2021. Kedua, prakiraan ini didasarkan pada asumsi bahwa tren pertumbuhan masa lalu akan terus berlanjut secara stabil hingga tahun 2035. Akan tetapi, tingkat pertumbuhan aktual di masa depan bisa saja berbeda akibat faktor-faktor eksternal, seperti kebijakan pengembangan wilayah, migrasi yang dipicu oleh pertumbuhan kawasan industri dan perguruan tinggi, ataupun perubahan kebijakan kependudukan. Ketiga, nilai daya dukung (K) dalam model logistik didasarkan pada asumsi mengenai luas wilayah administratif dan belum sepenuhnya memperhitungkan faktor-faktor lain seperti penggunaan lahan, daya dukung lingkungan, atau aksesibilitas terhadap sumber daya pangan dan air.

SIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan, ketiga model pertumbuhan eksponensial, hiperbolik, dan logistic mampu memperkirakan jumlah penduduk Kabupaten Malang dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi ($MAPE < 0,6\%$). Model yang paling akurat dalam mereplikasi data historis dari tahun 2012 hingga 2025 adalah model logistik, yang memiliki nilai MAPE terendah sebesar 0,30892%, diikuti oleh model eksponensial sebesar 0,57625% dan model hiperbolik sebesar 0,33797%. Berdasarkan proyeksi hingga tahun 2035, model logistik menghasilkan angka populasi tertinggi sebesar 2.960.052 jiwa, sedangkan model eksponensial memproyeksikan 2.940.830 jiwa dan model hiperbolik memproyeksikan 2.939.370 jiwa, angka-



angka yang hampir identik dengan variasi yang sangat kecil. Dengan demikian, penelitian ini menyimpulkan bahwa meskipun kemampuan proyeksi ketiga model tersebut bervariasi, ketiganya layak digunakan namun, karena akurasi yang lebih tinggi, model logistik paling direkomendasikan untuk perencanaan pembangunan jangka menengah. Penelitian ini juga menawarkan keunikan dengan membandingkan ketiga model matematis (eksponensial, hiperbolik, dan logistik) secara bersamaan dalam wilayah yang sama, serta menghitung daya dukung (K) berdasarkan luas wilayah Kabupaten Malang yang sebenarnya dengan pendekatan yang belum banyak diterapkan dalam penelitian proyeksi penduduk sebelumnya. Keterbatasan penelitian ini meliputi nilai daya dukung (K) dalam model logistik, yang bergantung pada asumsi mengenai luas wilayah administratif alih-alih data spesifik mengenai pemanfaatan lahan dan daya dukung lingkungan, serta estimasi parameter yang hanya didasarkan pada dua titik data (2012 dan 2025) tanpa memperhitungkan fluktuasi tahunan antara kedua tahun tersebut. Penelitian selanjutnya sebaiknya menggunakan data deret waktu tahunan yang lebih panjang dan komprehensif dengan teknik regresi atau optimisasi numerik sebaiknya digunakan untuk estimasi parameter guna meningkatkan akurasi nilai daya dukung (K) melalui estimasi empiris berdasarkan kondisi aktual di Kabupaten Malang (seperti penggunaan lahan dan daya dukung lingkungan) serta model proyeksi masa depan yang memperhitungkan faktor-faktor sosioekonomi, seperti migrasi dan kebijakan pembangunan daerah.

DAFTAR PUSTAKA

- Al Haq, A. A., & Oktafianto, K. (2026). Proyeksi Dinamika Kependudukan Kabupaten Lamongan Menggunakan Tiga Pendekatan Pemodelan Populasi. *Majamath: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 9(1), 10–23.
- Alvendar, J., & Baqi, A. I. (2012). Model Pemanenan Logistik Dengan Daya Dukung Bergantung Waktu. *Jurnal Matematika Unand*, 1(2), 60–65.
- Anggreini, D. (2018). Penerapan Persamaan Diferensial Verhulst Dalam Menentukan Proyeksi Penduduk Di Kabupaten Tulungagung. *Jurnal Fourier*, 7(2), 87–102.
- Arsandi, A. S., Ismiyati, I., & Hermawan, F. (2017). Dampak Pertumbuhan Penduduk Terhadap Infrastruktur Di Kota Semarang. *Jurnal Karya Teknik Sipil*, 6(4), 1–14.
- Bastomi, D., Auliasari, K., & Zahro, H. Z. (2021). Analisis Perbandingan Metode Single Exponential Smoothing Dan Trend Parabolik Untuk Prediksi Penjualan Kopi (Studi Kasus Pada Today Coffee). *Jati (Jurnal Mahasiswa Teknik Informatika)*, 5(2), 427–434.
- Febdian, L. (2013). Menentukan Model Pertumbuhan Penduduk Provinsi Sumatera Barat. *Jurnal Matematika Unand*, 2(4), 54–58.
- Khairunnisa, J. (2025). Penerapan Model Eksponensial Dan Model Logistik Untuk Memprediksi Jumlah Penduduk Kabupaten Lombok Timur. *Jurnal Diferensial*, 7(1), 1–12.
- Maricar, M. A. (2019). *Analisa Perbandingan Nilai Akurasi Moving Average Dan Exponential Smoothing Untuk Sistem Peramalan Pendapatan Pada Perusahaan Xyz*. 36–45.
- Nurkholipah, N. S., Anggriani, N., & Supriatna, A. K. (2017). Perbandingan Proyeksi Penduduk Jawa Barat Menggunakan Model Malthus Dan Verhulst Dengan Variasi Interval Pengambilan Sampel. *Prosiding Si Manis (Seminar Nasional Integrasi Matematika Dan*



Nilai Islami), 1(1).

- Nurmadhani, N., & Faisol, F. (2022). Penerapan Model Pertumbuhan Logistik Dalam Memproyeksikan Jumlah Penduduk Di Kabupaten Sumenep. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika (Jes-Mat)*, 8(2), 145–156.
- Pamungka, M. R. F., & Putri, A. R. (2024). Pertumbuhan Wilayah Kabupaten Bojonegoro Tahun 2014-2024. *Technologia: Jurnal Ilmiah*, 15(3), 619–628.
- Prihandono, B., Pasaribu, M., & Singkawang, K. (2024). *Pemodelan Pertumbuhan Populasi Kota Singkawang*. 13(6), 793–802.
- Rosiyanti, R. (2022). Aplikasi Model Pertumbuhan Logistik Dalammenentukan Proyeksi Penduduk Di Kabupaten Banyumas. *Perwira Journal Of Science & Engineering*, 2(2), 25–31.
- Salsabila, S., Prihandono, B., & Pasaribu, M. (N.D.). Pemodelan Pertumbuhan Populasi Kota Singkawang. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, 13(6).
- Wulandari, A. R., & Benty, D. D. N. (2017). *Analisis Proyeksi Kebutuhan Ruang Kelas Sekolah Dasar Di Kabupaten Tulungagung Tahun 2017 Sampai Dengan Tahun 2022*. Universitas Negeri Malang.