Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 05 No. 02 Hal. 45-60
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

PEMODELAN STOKHASTIK DALAM DINAMIKA PERUBAHAN UKURAN POPULASI TANAMAN YANG TERKENA JAMUR

Nurul Qomariyah[1,*], Rina Widyasari[2], Fibri Rakhmawati[3]

[123]*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sumatera Utara*
[*]*email: Nurul.qm15@gmail.com*

Abstrak: Pertumbuhan populasi tanaman dapat terganggu oleh infeksi jamur yang menyebar secara stokastik, terutama pada tanaman semangka dan melon yang rentan dalam kondisi iklim tidak stabil. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan matematis yang mempertimbangkan unsur ketidakpastian untuk memahami dinamika penyebaran penyakit. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan perubahan ukuran populasi tanaman yang terinfeksi jamur menggunakan pendekatan stokastik berbasis model epidemiologi SIR dan SITR. Metode yang digunakan adalah pemodelan stokastik berbasis proses Markov waktu kontinu dengan data primer yang dikumpulkan dari observasi langsung di Desa Paya Itik, Deli Serdang. Model ini memetakan populasi tanaman ke dalam kelompok rentan, terinfeksi, dalam perawatan, dan sembuh, serta menghitung laju infeksi, kesembuhan, dan kematian untuk menentukan stabilitas sistem. Hasil penelitian menunjukkan bahwa baik pada tanaman semangka maupun melon, model stokastik menunjukkan kestabilan dengan nilai rasio reproduksi dasar (R_0) < 1. Hal ini mengindikasikan bahwa satu tanaman terinfeksi tidak cukup untuk menyebabkan penyebaran penyakit lebih lanjut, sehingga epidemi tidak terjadi. Penyemprotan disinfektan terbukti menurunkan infeksi dan meningkatkan kesembuhan. Dengan demikian, pemodelan stokastik memberikan gambaran realistis terhadap dinamika populasi tanaman yang terinfeksi jamur dan dapat digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan dalam pengendalian penyakit tanaman.

Kata Kunci : Pemodelan Stokhastik, SIR, SITR, Dinamika Populasi, Jamur

Abstract: Plant population growth can be disrupted by fungal infections that spread stochastically, especially in watermelon and melon plants that are susceptible in unstable climate conditions. Therefore, a mathematical approach that considers the element of uncertainty is needed to understand the dynamics of disease spread. This study aims to model changes in the size of plant populations infected with fungi using a stochastic approach based on the SIR and SITR epidemiological models. The method used is continuous-time Markov process-based stochastic modeling with primary data collected from direct observation in Paya Itik Village, Deli Serdang. This model maps plant populations into susceptible, infected, under treatment, and recovered groups, and calculates the rate of infection, recovery, and death to determine system stability. The results showed that in both watermelon and melon plants, the stochastic model showed stability with a basic reproduction ratio (R_0) value <1. This indicates that one infected plant is not enough to cause further disease spread, so that an epidemic does not occur. Spraying disinfectants has been shown to reduce infection and increase recovery. Thus, stochastic modeling provides a realistic picture of the dynamics of plant populations infected with fungi and can be used as a basis for decision making in plant disease control.

Keywords: *Stochastic Modeling, SIR, SITR, Population Dynamics, Fungi*

PENDAHULUAN

Permasalahan penyakit tanaman, khususnya infeksi jamur, merupakan tantangan signifikan dalam sektor pertanian hortikultura. Tanaman semangka dan melon sebagai tanaman musiman sangat rentan terhadap serangan jamur seperti *Fusarium oxysporum* dan *Pseudoperonospora cubensis*, terutama ketika iklim tidak stabil. Infeksi ini berdampak langsung pada produktivitas dan ketahanan pangan. Untuk mengatasi tantangan ini secara sistematis dan terukur, pendekatan matematika menjadi alat penting dalam memahami serta memprediksi dinamika penyebaran penyakit tanaman. Model matematika dapat mengabstraksikan proses biologis kompleks ke dalam sistem persamaan yang dapat dianalisis.

Umumnya, pemodelan epidemiologi menggunakan dua pendekatan utama, yaitu deterministik dan stokastik. Model deterministik hanya melibatkan unsur-unsur kepastian dan mengabaikan faktor kejadian random, sedangkan model stokhastik mengandung unsur random di dalamnya, seperti probabilitas (Ndii, 2018). Model statistik berdasarkan persamaan diferensial stokhastik didefinisikan melalui proses markov waktu kontinu. Model ini baru baru ini digunakan untuk memodelkan dinamika populasi stokhastik. Daya tarik model ini terletak pada fleksibelitasnya untuk memodelkan masalah dengan dinamika yang kompleks dan memiliki perilaku non linier atau tidak menentu yang menyebabkan sistem menjadi kacau karena ukuran variabel meningkat sehingga tidak dapat diprediksi (Saba et al, 2019). Diantara model matematika yang memberikan sejumlah peluang terhadap hasil prediksi adalah model stokhastik.

Secara matematis, peristiwa stokhastik adalah peristiwa yang tidak pasti (mungkin) terjadi dan bersifat probabilitas. Formulasi suatu model kelahiran stokastik yaitu peluang jumlah populasi dengan jumlah individu di populasi awal sama dengan nilai tertentu (Pramuditya dan Tonah, 2017). Proses stokhastik merupakan kumpulan drai variabel acak pada suatu himpunan. Jenis khusus dari proses stokhastik adalah rantai Markov, yaitu proses dengan stokastik yang bersifat probabilistik dari proses yang akan datang hanya tergantung pada perilaku saat ini dan tidak terpengaruh oleh massa lalu (Kesuma et al., 2018). Model stokastik berbasis proses Markov waktu kontinu memberikan fleksibilitas dalam menangkap dinamika populasi yang kompleks dan acak, yang lazim terjadi dalam penyebaran penyakit jamur pada tanaman. Relevansi pendekatan ini semakin kuat karena proses infeksi jamur merupakan fenomena stokastik yang sangat bergantung pada waktu, kondisi lingkungan, dan respons tanaman.

Dalam analisis rantai Markov dihasilkan dari suatau probabilistik dapat digunakan untuk membantu dalam menentukan keputusan. Oleh karena itu analisis ini bukan teknik optimasi tetapi teknik deskriptif. Pada waktu t proses stokhastik $\{Xt, t = 0,1,\ldots\}$ dalam keadaaan i , maka dapat ditulis kejadian ini dengan $Xt = i$ (Pramuditya dan Tonah, 2017). Dalam stokhastik terdapat keseluruhan pengukuran baik objek ataupun individu yang disebut dengan populasi.

Meskipun model stokastik telah banyak digunakan dalam epidemiologi manusia dan hewan, terdapat celah penelitian dalam penerapannya pada populasi tanaman yang terinfeksi jamur. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model stokastik berbasis model epidemi SIR dan SITR guna memodelkan dinamika populasi tanaman semangka dan melon yang terinfeksi jamur, baik dengan maupun tanpa perlakuan penyemprotan (Kesuma et al., 2018). Salah satu bentuk pertumbuhan populasi ditandai dengan adanya dinamika populasi. Dinamika populasi adalah perubahan jumlah populasi di suatu tempat tertentu. Populasi selalu berubah dari waktu ke waktu, baik dalam jumlahnya maupun kelompoknya (Nurmawati, 2021).

Beberapa penelitian sebelumnya yang menggunakan yang menggunakan pemodelan stokhastik untuk dinamika populasi yaitu pada manusia yang dilakukan oleh Pramuditya et al.(2017). Penelitian sebelumnya yang juga menggunakan pemodelan stokhastik yaitu pada penyakit yang ditularkan oleh nyamu yang dilakukan oleh Peter J et al. (2020). Namun untuk pemodelan stokhastik dengan dinamika ukuran populasi tanaman yang terkena jamur belum pernah dilakukan Sehingga dengan pilihan tanaman semangka dan melon menjadi jawaban untuk dari pemasalah tanaman yang terkena jamur yang menyebabkan kerusakan pada populasi tanaman semangka dan melon. Kontribusi utama penelitian ini adalah menyajikan pendekatan matematis berbasis probabilitas yang mampu menggambarkan dan memprediksi perubahan ukuran populasi tanaman dalam kondisi acak, serta memberikan rekomendasi pengendalian berbasis model untuk praktik pertanian yang lebih adaptif dan efektif.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kuantitatif. Penelitian kuantitatif adalah metode penelitian yang dapat diukur atau dihitung secara langsung sebagai variabel angka atau bilangan. Data kuantitatif yang digunakan meliputi data pemodelan stokhastik dalam dinamika perubakan ukuran populasi tanaman yang terserang jamur. Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer. Data primer adalah jenis data yang dikumpulkan secara langsung dari sumber utamanya seperti melalui wawancara, survei, eksperimen, dan sebagainya. Data primer biasanya selalu bersifat spesifik karena disesuaikan oleh kebutuhan peneliti yang diambil di Desa Paya Itik Kec. Galang Kab. Deli Serdang. Metode pengumpulan data dilakukan dengan observasi sejak bulan April 2022 hingga November 2022.

Variabel adalah sifat atau nilai dari objek, organisasi, seseorang atau kegiatan yang memiliki variasi tertentu yang telah ditetapkan peneliti untuk kemudian dipelajari serta ditarik kesimpulannya. Variabel pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

$N(t)$: jumlah keseluruhan populasi tanaman untuk mengetahui jumlah keseluruhan populasi

$S(t)$: jumlah individu yang rentan terkena jamur untuk mengetahui jumlah jamur yang memiliki peluang untuk terkena jamur

$I(t)$: jumlah individu yang terkena jamur untuk mengetahui jumlag tanaman yang akan dimodelkan

$R(t)$: jumlah individu yang telah sembuh dari serangan jamur untuk mengetahui jumlah tanaman yang sudah berhasil sembuh dari jamur

Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 05 No. 02 Hal. 45-60
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

Berdasarkan variabel tersebut maka persamaannya

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), t \geq 0$$

Dari variabel diatas dapat disimpulkan variabel populasi tanaman Semangka dan Melon tanpa penyemprotan/treatment sebagai berikut

Variabel tanaman Semangka:

$N_s(t)$: jumlah keseluruhan populasi tanaman semngka
Ss(t) : jumlah tanaman semangka yang rentan terkena jamur
$I_s(t)$: jumlah tanaman semangka yang sudah terkena jamur
$R_s(t)$: jumlah tanaman semangka yang telah sembuh dari serangan jamur

$$s(t) + Is(t) + Rs(t) = Ns(t), t \geq 0$$

Variabel tanaman Melon:

$N_m(t)$: jumlah keseluruhan populasi tanaman smelon
Sm(t) : jumlah tanaman melon yang rentan terkena jamur
$I_m(t)$: jumlah tanaman melon yang sudah terkena jamur
Rm(t) : jumlah tanaman melon yang telah sembuh dari serangan jamur

$$S_m(t) + I_m(t) + R_m(t) = N_m(t), t \geq 0$$

Pada penelitian ini dilakukan langkah kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam menyelesakan masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah pemodelan yang meliputi:

1. Mengumpulkan data
   Tahap pengumpulan data dimulai dari pengamatan dan pengambilan data dari umur tanaman 10 hingga mpanen. Berdasarkan jumlah keselurahan populasi, jumlah individu yang rentan terserang jamur, jumlah individu yang terserang jamur, dan jumlah individu yang sembuh dari serang jamur. Di Desa Paya Itik, Kecamatan Galang, Kabupaten Deli Serdang. Alir pemodelan ini diberikan pada Gambar 1 berikut ini.
2. Menentukan model
   Pada penelitian ini diperlukan model stokhastik berdasarkan SDE pada populasi tanaman semangka dan melon, rumus yang digunakan adalah

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t), t \geq 0 \, dan \, S(t) + I(t) + T(t) + R(t) = N(t),$$

$$N_{t=}S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)}$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \tau S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \tau I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \tau R$$

Mencari nilai untuk mendapatkan hasil β,γ dan μ

$$\beta = \frac{S}{N(t) \times h}$$

$$\gamma = \frac{R}{N(t) \times h}$$

$$\mu = \frac{S}{N(t)}$$

Model matematika untuk SITR diberikan berikut ini.

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta I}{N} S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I}{N} S - \alpha I - \mu I$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

3. Menetukan nilai kestabilan
   Setelah melakukan perbandingan model stokhastik pada tanaman semangka dan melon kita dapat menentukan nilai kestabilan dari penelitian yang didapat pada tanaman semangka dan melon yang menggunakan penyemprotan atau tanpa penyemprotan.
4. Menentukan rasio
   Apakah pada pemodelan stokhastik dalam dinamika populasi pada tanaman semangka dan melon yang terkana jamur $R_0 < 1$ individu yang rentan terkena jamur akan hilang atau $R_0 > 1$ individu yang rentan terhadap jamur akan bertambah atau pun mati.
5. Menarik Kesimpulan
   Dalam hal ini ditemukan hasil gambaran kurva pemodelan stokhastik dalam dinamika perubahan ukran populasi tanaman yang terkena jamur pada populasi tanaman semngka dan melon yang telah dimodelkan oleh peneliti dengaan data perubahan populasi tanaman dari masa tanam hingga masa panen di Desa Paya Itik Kabupaten Deli Serdang.

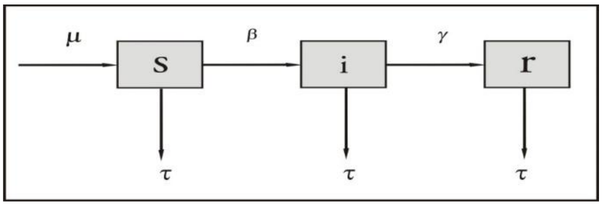

Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 05 No. 02 Hal. 45-60
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Model SIR tanpa Penyemprotan

Perubahan tanaman yang rentan (*suspectible*) menjadi terinfeksi (*infected*) dan menjadi sembuh (*recovered*) seperti Gambat 1 di bawah.



Gambar 1. Model SIR

Berdasarkan asumsi yang diberikan pada Gambar 1, maka model yang dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial. Selanjutnya, hasil penelitian tanaman semangka pada minggu pertama tanpa penyemprotan diberikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Tanaman semangka pada minggu pertama tanpa penyemprotan

Parameter	Defenisi	Nilai	Satuan
$N_s(t)$	Jumlah keseluruhan populasi tanaman semangka	125	Batang
$S_s(t)$	Jumlah tanaman semangka yang rentan terkena jamur	118	Batang
$I_s(t)$	Jumlah tanaman semangka yang sudah terkena jamur	7	Batang
$R_s(t)$	Jumlah tanaman semangka yang telah sembuh dari serangan jamur	0	Batang
μ	Tingkat tanaman yang rentan terinfeksi jamur	118/125 = 0,944	
β	laju infeksi jamur		
τ	Tingkat kematian	0	
γ	Laju kesembuhan dari tanaman yang terinfeksi	0	

Berdasarkan data pada Tabel 1 di atas, dalam penelitian berdasarkan waktu yang dilakukan selama h 1 minggu (tujuh hari) jumlah awal keseluruhan $N_s(t)$ sebanyak 125 tanaman semangka, jumlah tanaman semangka yang rentan terkena jamur $S_s(t)$ sebanyak 118.

$$S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} = N_t$$

$$118 + 7 + 0 = 125$$

untuk mendapatkan nilai β, γ dan μ

$$\beta = \frac{118}{125 \times 7} = \frac{118}{875} = 0{,}13$$

$$\gamma = \frac{0}{125 \times 7} = \frac{0}{875} = 0$$

$$\mu = \frac{118}{125} = 0{,}944$$

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}94 - 0{,}13(7)(118) - 0(118) = -106{,}44$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \tau I$$

$$= 0{,}13(7)(118) - 0(7) - 0(7) = 107{,}38$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \tau R = 0(7) - 0(0) = 0$$

Hasil penelitian tanaman semangka pada minggu ke-dua tanpa penyemprotan

Dari data minggu pertama jumlah populasi masih tetap 125 karena belum ada tanaman yang mati. Pada minggu kedua jumlah tanaman semangka yang rentan terhadap jamur $S_s(t)$ berkurang dari minggu ke dua berkurang menajadi 103 tanaman $I_s(t)$ pada minggu pertama 7 tanaman menjadi 12 yang berarti ada 5 tanaman yang terpapar jamur. Jumlah tanaman semangka yang sembuh dari jamur$R_s(t)$ pada minggu kedua sebanyak 5 tanaman, hal itu disebabkan oleh rutinnya pemberian pupuk dan penyiraman pada tanaman yang terinfeksi jamur.

$$\beta = \frac{103}{125 \times 7} = \frac{103}{875} = 0{,}117$$

$$\gamma = \frac{5}{125 \times 7} = \frac{5}{875} = 0{,}005$$

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \tau S$$

$$= 0{,}824 - 0{,}117(12)(103) - (0{,}04)(103) = -147{,}908$$

$$\frac{dI}{dt} = IS - \gamma I - \tau I$$

$$= (0{,}117)(12)(103) - 0{,}005(12) - 0{,}04(12) = 9{,}21$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \tau R = 0{,}005(12) - 0{,}04(5) = -0{,}14$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4. Selanjutnya, data hasil penelitian tanaman melon pada minggu pertama tanpa penyemprotan diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Hasil penelitian tanaman melon pada minggu pertama tanpa penyemprotan

Parameter	Defenisi	Nilai	Satuan
$N_s(t)$	Jumlah keseluruhan populasi tanaman semangka	127	Batang

S_s(t)	Jumlah tanaman semangka yang rentan terkena jamur	117	Batang
I_s(t)	Jumlah tanaman semangka yang sudah terkena jamur	10	Batang
R_s(t)	Jumlah tanaman semangka yang telah sembuh dari serangan jamur	0	Batang
$\boldsymbol{\mu}$	Tingkat tanaman yang rentan terhadap jamur	117/127 = 0,92	
$\boldsymbol{\beta}$	laju infeksi jamur	0,13	
$\boldsymbol{\tau}$	Tingkat kematian	0	
$\boldsymbol{\gamma}$	Laju kesembuhan dari tanaman yang terinfeksi	0	

Berdasarkan data pada Tabel 2 di atas, data penelitian minggu pertama jumlah populasi tanaman sebanyak 127 tanaman melon. Jumlah tanaman melon yang rentan terhadap jamur $S_m(t)$ 117 tanaman. Jumlah tanaman yang sudah terkena jamur $I_m(t)$ ada 10 tanaman. Pada penelitian diminggu pertama belum terdapat tanaman yang mati.

$$
\begin{aligned}
S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} &= N_t \\
&= 117 + 10 + 0 = 127 \\
\beta &= \frac{117}{127 \times 7} = \frac{117}{889} = 0{,}13 \\
\frac{dS}{dt} &= \mu - \beta IS - \tau S \\
&= 0{,}92 - (0{,}13)(10)(117) - 0(117) = -151{,}18 \\
\frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I - \tau I \\
&= (0{,}13)(10)(117) - (0)(10) - (0)(10) = 152{,}1 \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \tau R \\
&= 0(10) - 0(0) = 0
\end{aligned}
$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.

Analisis Kestabilan Model

Dalam penelitian ini akan dibahas perilaku model dengan membandingkan dua kelompok, yaitu tanaman yang rentan, kelompok tanaman yang terinfeksi dan kelompok tanaman yang sudah sembuh dari jamur sebagi suatu persamaan diferensial.

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \tau S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \tau I$$

Tanaman semangka pada minggu pertama

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0{,}94 - 0{,}13(7)(118) - 0(118) = -106{,}44 \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I - \tau I \\ &= 0{,}13(7)(118) - 0(7) - 0(7) = 107{,}38 \end{aligned}$$

Tanaman semangka pada minggu kedua

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu - \beta IS - \tau S \\ & \quad 0{,}824 - 0{,}117(12)(103) - (0{,}04)(103) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I - \tau I \\ &= 0{,}13(7)(118) - 0(7) - 0(7 = 9{,}21 \\ \frac{dS}{dt} & \quad 0{,}824 - 144{,}612 - 4{,}12 = -147{,}908 \end{aligned}$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.

Untuk mengetahui kestabilan model, selanjuntnya untuk tanaman semangka dan melon tanpa penyemprotan dilakukan perhitungan angka rasio (R_0).

$$R_0 = \frac{\beta}{(\mu + \gamma)}$$

R_0 pada tanaman semangka minggu pertama tanpa penyemprotan:

$$R_0 = \frac{0{,}13}{(0{,}94 + 0)} = 0{,}138$$

R_0 pada tanaman semangka minggu kedua tanpa penyemprotan :

$$R_0 = \frac{0{,}117}{(0{,}824 + 0{,}05)} = 0{,}133$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.

R_0 pada tanaman melon minggu pertama tanpa penyemprotan :

$$R_0 = \frac{0{,}13}{(0{,}92 + 0)} = 0{,}141$$

R_0 pada tanaman melon minggu kedua tanpa penyemprotan :

$$R_0 = \frac{0{,}10}{(0{,}73 + 0{,}010)} = 0{,}13$$

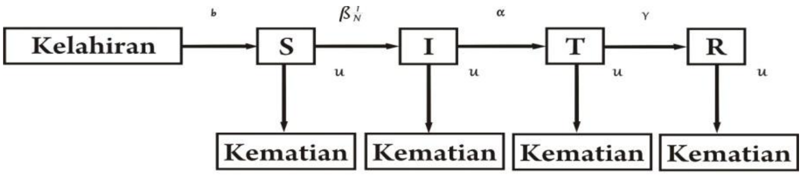
Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.

Karena pada tanaman semangka dan melon yang tidak menggunakan penyemprotan memiliki nilai rata-rata $R_0 < 1$. Berdasarkan uji kestabilan model $R_0 < 1$ dinyatakan tidak terjadi epidemi.

Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 05 No. 02 Hal. 45-60
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

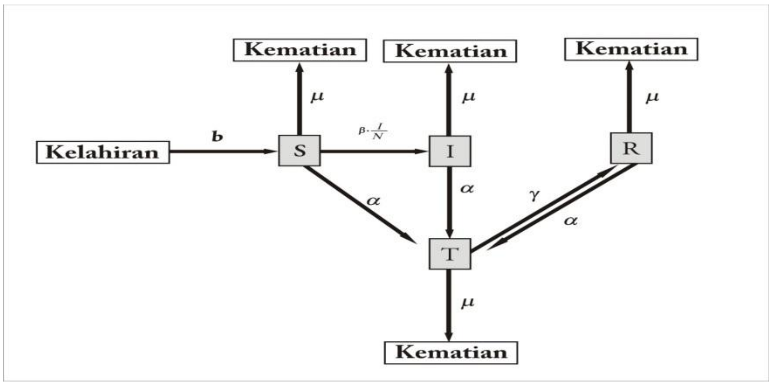
Model SITR

Dalam model penyebaran jamur pada tanaman semangka dan melon menggunakan treatment dibagi menjadi 4 kelas yaitu rentan/*suspectible*(S) yang menyatakan populasi yang rentan terhadap jamur. Yang kedua yaitu terinfeksi/*infectious*(I) populasi tanaman yang terinfeksi jamur, yang ketiga ada penyemprotan/*treatment*(T) yang menyatakan populasi yang terserang jamur dan lalu mendapatkan penyemprotan atau *treatment,* yang keempat ada populasi yang sembuh/*recovery*(R) yang menyatakan populasi yang sembuh dari jamur.



Gambar 2. Model Awal SITR

Namun demikian, dalam kasus ini model SITR berbeda dari model diatas dikarenakan setiap individu yang rentan terkena jamu $S_{(t)}$ tanaman yang sudah terkena jamur $I_{(t)}$ dan tanaman yang sudah sembuh terhadap jamur $R_{(t)}$ harus disemprot/di treatment $T_{(t)}$ berdasarkan banyaknya jumlah populasi yang ada dilahan tersebut. Model SITR diberikan pada Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3. Model SITR yang sudah dilakukan pembentukan model berdasarkan studi kasus

1. Tanaman Semangka Menggunakan Penyemprotan

Hasil penelitian tanaman semangka pada mingu pertama dengan penyemprotan. Berdasarkan data minggu pertama pada tanamana semangka populasi awal sebanyak 100 tanaman, jumlah tanaman yang rentan terhadap jamur $S_s(t)$ sebanyak 89 tanaman, jumlah tanaman yang sudah terkena jamur $I_s(t)$ sebanyak 11 tanaman, dengan

$$\beta = \frac{89}{100 \times 7} = \frac{89}{700} = 0{,}064$$

$$\gamma = \frac{0}{100 \times 7} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\beta\frac{I}{N} &= 0{,}007\\
\frac{dS}{dt} &= bN-\beta\frac{I}{N}S-\alpha S-\mu S\\
&= (0)(100)-(0{,}007)(89)-(0{,}03)(89)-(0{,}89)(89)\\
&= -82{,}453\\
\frac{dI}{dt} &= \beta\frac{I}{N}S-\alpha I-\mu I\\
&= (0{,}007)(89)-(0{,}03)(11)-(0{,}89)(11)\\
&= -9{,}497\\
\frac{dT}{dt} &= \alpha S+\alpha I+\alpha R-\gamma T-\mu T\\
&= (0{,}03)(89)+(0{,}03)(11)+(0{,}03)(0)+(0)(100)+(0{,}89)(100)\\
&= 11{,}9\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma T-\alpha R-\mu R\frac{dR}{dt}=0(100)-(0{,}03)(0)-(0{,}89)(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4. Selanjutnya, hasil penelitian tanaman melon pada mingu pertama dengan penyemprotan doiberikan pada Tabel 3 berikut ini.

Tabel 3. Hasil penelitian tanaman melon pada mingu pertama dengan penyemprotan

Parameter	Defenisi	Nilai	Satuan
$\mathbf{N_s(t)}$	Jumlah keseluruhan populasi tanaman semangka	110	Batang
$\mathbf{S_s(t)}$	Jumlah tanaman semangka yang rentan terkena jamur	93	Batang
$\mathbf{I_s(t)}$	Jumlah tanaman semangka yang sudah terkena jamur	17	Batang
$\mathbf{R_s(t)}$	Jumlah tanaman semangka yang telah sembuh dari serangan jamur	0	Batang
$\mathbf{T_s(t)}$	Banyaknya individu yang diberi treatment sama dengan banyaknya S, I, R	110	
$\boldsymbol{b}$	Angka kelahiran tanaman baru setiap minggu	0	
$\boldsymbol{\mu}$	Tingkat tanaman yang rentan terhadap jamur	93/110 = 0,84	
$\boldsymbol{\beta}$	laju infeksi jamur	0,12	
$\boldsymbol{\tau}$	Tingkat kematian	0	
$\boldsymbol{\gamma}$	Laju kesembuhan dari tanaman yang terinfeksi	0	
$\boldsymbol{\alpha}$	Laju pemberian treatmen	5/100 = 0,05	

Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 05 No. 02 Hal. 45-60
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

$\boldsymbol{b+/-N}$	Laju populasi yang lahir dari populasi	0
$\boldsymbol{\beta \frac{I}{N}}$	Laju besarnya tanaman yang terinfeksi	0,0026

Berdasarkan data pada Tabel 3 di atas,minggu pertama ini jumlah populasi secara keseluruhan sebanyak 110 tanaman, dengan jumlah tanaman yang rentan terhadap jamur $S_m(t)$ sebanyak 93 tanaman, tanaman yang sudah terkena jamur $I_m(t)$ sebanyak 17 tanaman dan di minggu pertmana belum ada tanaman yang sembuh, dengan

$$\beta = \frac{93}{110 \times 7} = \frac{93}{770} = 0{,}12$$

$$\gamma = \frac{0}{110 \times 7} = 0$$

$$\frac{I}{N} = 0{,}12 \times \frac{17}{770} = 0{,}0026$$

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta \frac{I}{N} S - \alpha S - \mu S$$

$$(0)(110) - (0{,}0026)(93) - (0{,}05)(93) - (0{,}84)(93)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 - 0{,}2418 - 4{,}65 - 78{,}12 = -83{,}0118$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \alpha I - \mu I$$

$$= (0{,}0026)(93) - (0{,}05)(17) - (0{,}84)(17)$$

$$= -14{,}8882$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha S + \alpha I + \alpha R - \gamma T - \mu T$$

$$= (0{,}05)(93) + (0{,}05)(17) + (0{,}05)(0) - (0)(110) - (0{,}84)(110)$$

$$= -86{,}9$$

$$\frac{dR}{dt} = = \gamma T - \alpha R - \mu R$$

$$= (0)(110) - (0{,}05)(0) - (0{,}84)(0)$$

$$= 0$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.

Dalam penelitian ini akan dibahas perilaku model dengan membandingkan tiga kelompok, yaitu tanaman yang rentan, kelompok tanaman yang terinfeksi dan kelompok tretment pada tanaman sebagi suatu persamaan diferensial.

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta I}{N} S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I}{N} S - \alpha I - \mu I$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu$$

Tanaman semangka pada minggu pertama

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= bN - \beta\frac{I}{N}S - \alpha S - \mu S \\
&= (0)(100) - (0{,}007)(89) - (0{,}03)(89) - (0{,}89)(89) \\
&= -82{,}453 \\
\frac{dI}{dt} &= \beta\frac{I}{N}S - \alpha I - \mu I \\
&= (0{,}007)(89) - (0{,}03)(11) - (0{,}89)(11) \\
&= -9{,}497 \\
\frac{dT}{dt} &= \alpha S + \alpha I + \alpha R - \gamma T - \mu T \\
&= (0{,}03)(89) + (0{,}03)(11) + (0{,}03)(0) + (0)(100) + (0{,}89)(100) \\
&= 11{,}9
\end{aligned}$$

Tanaman melon pada minggu pertama

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= bN - \beta\frac{I}{N}S - \alpha S - \mu S \\
&= (0)(110) - (0{,}0026)(93) - (0{,}05)(93) - (0{,}84)(93) \\
&= -83{,}0118 \\
\frac{dI}{dt} &= \beta\frac{I}{N}S - \alpha I - \mu I \\
&= (0{,}0026)(93) - (0{,}05)(17) - (0{,}84)(17) = -14{,}8882 \\
\frac{dT}{dt} &= \alpha S + \alpha I + \alpha R - \gamma T - \mu T = -86{,}9
\end{aligned}$$

Untuk mengetahui kestabilan model, selanjuntnya untuk tanaman semangka dan melon tanpa penyemprotan dilakukan perhitungan angka rasio (R_0).

$$R_0 = \frac{\beta.\alpha}{\tau + \gamma + \beta\frac{I}{N}S}$$

R_0 pada tanaman semangka minggu pertama menggunakan penyemprotan :

$$R_0 = \frac{\beta\alpha}{\tau + \gamma + \beta\frac{I}{N}S} = \frac{0{,}064 \times 0{,}003}{0 + 0 + 0{,}007} = 0{,}027$$

R_0 pada tanaman semangka minggu kedua menggunakan penyemprotan :

$$R_0 = \frac{\beta.\alpha}{\tau + \gamma + \beta\frac{I}{N}S} = \frac{0{,}11 \times 0{,}05}{0 + 0{,}02 + 0{,}711} = 0{,}0075$$

R_0 pada tanaman melon minggu pertama menggunakan penyemprotan :

$$R_0 = \frac{\beta.\alpha}{\tau + \gamma + \beta\frac{I}{N}S} = \frac{0{,}12 \times 0{,}05}{0 + 0 + 0{,}02418} = 0{,}024$$

R_0 pada tanaman melon minggu kedua menggunakan penyemprotan :

$$R_0 = \frac{\beta.\alpha}{\tau + \gamma + \beta\frac{I}{N}S} = \frac{0{,}10 \times 0{,}045}{0 + 0{,}018 + 0{,}01328} = 0{,}029$$

Demikian seterusnya hingga minggu ke-4.
Jadi dari kesimpulan diatas, untuk tanaman semangka dan melon yang menggu akan penyemprotan memiliki $R_0 < 1$, yang dimana dinyatakan jika $R_0 < 1$ tidak adanya epedemi.

Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dinamika perubahan ukuran populasi tanaman semangka dan melon yang terserang jamur dengan pendekatan stokastik, menggunakan model epidemiologi SIR dan SITR berbasis proses Markov waktu kontinu. Penelitian dilakukan melalui pengamatan langsung di Desa Paya Itik, dengan dua perlakuan utama: tanaman yang disemprot disinfektan (treatment) dan tanaman tanpa penyemprotan.

1. Dinamika Tanaman Tanpa Penyemprotan
   Hasil pengamatan pada tanaman semangka dan melon tanpa perlakuan menunjukkan fluktuasi yang signifikan pada jumlah individu dalam setiap kompartemen (S, I, R). Model SIR yang digunakan berhasil menangkap transisi populasi dari tanaman rentan (S) menjadi terinfeksi (I), kemudian sembuh (R), meskipun laju kesembuhan pada kelompok tanpa penyemprotan sangat rendah. Hal ini mencerminkan realitas di lapangan, bahwa tanpa intervensi, infeksi jamur berkembang pesat, menyebabkan peningkatan populasi terinfeksi dan bahkan kematian tanaman. Nilai rasio reproduksi dasar (R_0) yang dihitung tetap berada di bawah satu, namun mendekati nilai kritis, yang menunjukkan sistem belum sepenuhnya stabil.
2. Dinamika Tanaman dengan Penyemprotan
   Model SITR diaplikasikan pada data tanaman yang mendapat penyemprotan. Penambahan kompartemen "Treatment" (T) memungkinkan pemodelan proses penyembuhan yang lebih realistis. Hasil menunjukkan bahwa penyemprotan meningkatkan laju transisi dari I ke T, dan dari T ke R, sehingga populasi sembuh meningkat lebih cepat. Nilai R_0 pada kelompok ini lebih rendah secara konsisten dibanding kelompok tanpa penyemprotan, memperkuat argumen bahwa perlakuan disinfektan efektif dalam menekan penyebaran penyakit.
3. Stabilitas Model dan Interpretasi R_0
   Dalam kedua model (SIR dan SITR), nilai $R_0 < 1$ menunjukkan bahwa satu tanaman terinfeksi tidak cukup untuk memicu wabah baru. Ini berarti penyebaran jamur tidak bersifat epidemik, dan populasi tanaman berada dalam kondisi stabil. Hal ini sesuai dengan asumsi dasar model stokastik: bahwa gangguan acak (seperti kondisi cuaca atau infeksi sporadis) dapat menyebabkan fluktuasi, namun tidak cukup untuk mendorong sistem ke arah instabilitas.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat ditarik kesimpulan bahwa dinamika ukuran populasi tanaman yang terkena jamur menggunakan pemodelan stokhastik berdasarkan epidemilogi SIR dan SITR menyatakan : Tanaman semangka dan melon yang dilakukan penyemprotan/treatment dan tanpa penyemprotan didapatkan nilai sehingga diyatakan memliki kestabilan model dan dinyatakan setiap tanaman yang terinfeksi tidak dapat menyebarkan penyakit kepada lebih dari satu tanaman yang akan terinfeksi baru lagi akhirnya tidak terjadi epidemic karena nilai rata-rata $R_0 < 1\ untuk\ kedua\ model$ dimana tanpa penyemprotan nilai $R_0 = 0{,}13$ dan dengan penyemprotan nilai $R_0 = 0{,}029$. Hal ini bisa terjadi karena berkaitan dengan jarak tanam atau dalam sifat tanaman yang tidak dapat menyabar jamur yang tidak dapat kami ulas lebih jauh lagi karena itu sudah bukan ranah kami.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2007). *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Elena Roxana Tudoroïu, & Stancioiu, M. (2017). Stochastic optimal control of pH neutralization process in a water treatment plant. *Review of the Air Force Academy*, *15*(1), 49–68.

Gross, J. J. (2008). Emotion regulation. Dalam M. Lewis & J. M. Haviland-Jones (Eds.), *Handbook of Emotions* (Edisi ke-3, hlm. 497–512). New York: The Guilford Press.

Harinaldi. (2005). *Prinsip-Prinsip Statistika untuk Teknik dan Sains*. Sleman: [Penerbit tidak disebutkan].

Kalie, M. B. (2008). *Bertanam Semangka*. Bogor: Penebar Swadaya.

Khambali. (2011). *Tafsir dari Redaksi Ulul Albab dalam QS. Ali Imran*. Bandung: Lembaga Studi Islam Madani.

Maria, T. S., & Cuadros, J. (2014). A stochastic model for population and well-being dynamics. *The Journal of Mathematical Sociology*, *38*(2), 75–94.

Marli, Z. (2018). *Pengantar Biostatistika dan Aplikasinya pada Status Kesehatan Gizi Remaja*. Banda Aceh: Syiah Kuala University Press.

Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Sleman: Deepublish.

Pagalay, U. (2009). *Mathematical Modeling: Aplikasi pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Malang Press.

Witbooi, P. J., & Nyabadza, G. J. (2020). Stochastic modeling of a mosquito-borne disease. *Advances in Difference Equations*, *2020*, 1–16.

Saba-Infante, L., & Salazar, L. (2019). Stochastic models to estimate population dynamics. *Statistics, Optimization and Information Computing*, *7*(2), 311–328.

Pramuditya, S. A., & Triyanto, T. (2017). Model stokastik pertumbuhan populasi (Pure Birth Process). *Jurnal Euclid*, *4*(4), 675–688.

Sastrahidayat, I. R. (2016). *Penyakit Tumbuhan oleh Parasit Obligat*. Malang: UB Press.

Sastrahidayat, I. R. (2017). *Penyakit Tumbuhan yang Disebabkan oleh Jamur*. Malang: UB Press.

Setyohadi, D., & Wiadnya, D. G. R. (2018). *Pengkajian Stok dan Dinamika Populasi Ikan Lemuru*. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Triasmoro, B. B. (2010). *Minimalisasi Sebuah Proses Stokastik yang Komposisional*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Wahyuni, I. (2018). *Dinamika Populasi Hama Penghisap Daun dan Kejadian Gejala Serangan Geminivirus pada Tanaman Cabai (Capsicum annum L.) di Sembalun*.