Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 5 No. 02 Hal. 11-20
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

KARAKTERISASI PUSAT GELANGGANG POLINOM MIRING ATAS MATRIKS RIIL 3×3

Jeriko Gormantara[1,*)]

[1)]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*
[*]*email: jerikogormantara@unhas.ac.id*

Abstrak: Pusat dari gelanggang polinom miring berperan penting dalam memahami sifat simetri dan komutativitas dalam struktur aljabar nonkomutatif. Konsep ini memiliki relevansi dalam pengembangan teori modul dan aplikasi seperti pengkodean dan kriptografi. Dalam penelitian ini, dikarakterisasi pusat dari gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks riil 3×3. Hasil ini diperoleh dengan membangun sebuah endomorfisma pada gelanggang matriks riil 3×3, yang kemudian digunakan untuk mengkonstruksi gelanggang polinom miring. Hasil utama menunjukkan bahwa pusat gelanggang tersebut terdiri tepat dari polinomial-polinomial berderajat genap dengan koefisien berupa matriks skalar riil. Struktur ini muncul dari syarat bahwa elemen pusat harus komutatif terhadap operasi dalam gelanggang R dan terhadap x. Pembuktian dilakukan menggunakan argumen inklusi ganda.

Kata Kunci: Gelanggang Polinom Miring; Pusat; Endomorfisma; Gelanggang Matriks

Abstract: *The center of a skew polynomial ring plays a crucial role in understanding symmetry and commutativity within noncommutative algebraic structures. This concept is relevant in the development of module theory and applications such as coding and cryptography. In this research, the center of the skew polynomial ring under the ring of* 3×3 *real matrices is characterized. The result is obtained by constructing an endomorphism ring of* 3×3 *real matrices, which is then used to define the associated skew polynomial ring. The main result establishes that the center consists precisely of specific polynomials with even degree. This structure arises from the requirement that central elements must commute with both* R *and the indeterminate* x. *The proof is carried out using a double inclusion argument.*

Keywords: *Skew Polynomial Ring; Center; Endomorphism; Matrix Ring*

PENDAHULUAN

Dalam teori gelanggang, pusat dari suatu gelanggang adalah himpunan elemen yang komutatif terhadap semua elemen lain di gelanggang tersebut. Sementara itu, gelanggang polinom miring merupakan generalisasi dari gelanggang polinomial biasa, dimana variabel tak tentu x tidak lagi komutatif terhadap koefisien, melainkan mengikuti aturan khusus $xa = \sigma(a)x$ untuk suatu endomorfisma σ pada gelanggang koefisien R. Misalnya, jika R adalah bilangan riil dan σ adalah pemetaan identitas, maka $R[x;\sigma]$ kembali ke gelanggang polinomial biasa $R[x]$. Namun, jika σ bukan pemetaan identitas, maka struktur perkaliannya menjadi tidak komutatif dan lebih kompleks. Bentuk pusat dari gelanggang seperti ini memberikan pengetahuan lebih lanjut tentang sifat komutatif parsial dan struktur internalnya. Lebih lanjut lagi, ini dapat diaplikasikan pada bidang aljabar modern.

Gelanggang nonkomutatif, khususnya gelanggang polinom miring, telah menjadi pusat penelitian aljabar modern karena aplikasinya dalam teori pengkodean, kriptografi, dan aljabar kuantum. Gelanggang polinom miring yang diperkenalkan Ore pada tahun 1930 merupakan stuktur penting dalam aljabar nonkomutatif karena interaksinya antara ekstensi polinomial dengan automorfisma atau derivasi. Penelitian teoretis terkini fokus pada sifat-sifat aljabarnya seperti graf pembagi nol Amir (2019), struktur ideal Shahoseini et al. (2024), dan pusat gelanggang Amir et al. (2023), Chan et al. (2023), Amir et al. (2024). Contohnya, Werner (2021) meneliti polinomial miring bernilai integer dengan sifat faktorisasi unik, sementara Paykanian et al. (2021) meneliti tentang gelanggang Ikeda-Nakayama, dan Ánh (2022) memperkenalkan teknik Schreier dalam gelanggang polinom miring. Kajian paralel tentang aljabar polinomial matriks, seperti analisis Nguefack (2023) tentang sifat struktural dan keterkaitannya dengan teorema Cayley-Hamilton serta penelitian Habibi & Paykan (2025) tentang gelanggang matriks segitiga umum. Temuan mutakhir Chapman & Paran (2024) tentang titik tetap dan orbit dalam ekstensi polinomial miring juga memberikan kontribusi signifikan.

Di luar penelitian teoretis, gelanggang polinom miring juga memiliki banyak aplikasi. Aplikasinya mencakup berbagai bidang, terutama teori pengkodean, di mana struktur non-komutatifnya meningkatkan kemampuan koreksi kesalahan dan keamanan kriptografi. Sebagai contoh, Bennenni et al. (2024) mengaplikasikan gelanggang polinom miring pada kode siklik miring campuran atas gelanggang, Lobillo & Muñoz (2025) membangun pasangan kode siklik miring dengan memanfaatkan gelanggang polinom miring, sementara El Badry et al. (2025) mengembangkan kode grup LCD miring. Pathak et al. (2025) memanfaatkan kode negasiklik miring dengan panjang $4p^s$ dan Dertli & Cengellenmis (2025) mengeksplorasi kode miring atas quaternion split. Inovasi-inovasi ini menegaskan peran krusial gelanggang polinom miring dalam sistem komputasi dan kriptografi modern.

Aspek kritis yang diteliti adalah pusat gelanggang polinom miring yang mengatur sifat komutativitas dan aplikasi teori modul. Penelitian terkini oleh Chan et al. (2023) menghubungkan pusat ini dengan grup ozon dalam aljabar kuantum, sementara Amir et al. (2023) mengkarakterisasi pusat atas matriks diagonal coquaternion. Adapun terkait pembentukan gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks riil 2×2 telah dibahas di Amir (2019). Meskipun beberapa penelitian telah membahas pusat gelanggang polinom miring, seperti Chan et al. (2023), Amir et al. (2023), dan Amir (2019), namun pembahasan tersebut masih terbatas pada struktur gelanggang tertentu, dan belum mencakup gelanggang matriks riil 3×3. Penelitian ini menjembatani kesenjangan tersebut dengan mengkarakterisasi lengkap pusat gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks riil 3×3.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan dengan menggunakan pendekatan studi literatur untuk menginvestigasi pusat gelanggang polinom miring atas matriks riil 3×3. Adapun tahap-tahap dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: pertama, mengumpulkan dan mempelajari beberapa artikel terkait pusat gelanggang agar dapat dikembangkan dalam mengkarakterisasi pusat gelanggang polinom miring atas matriks riil 3×3. Kedua, menentukan endomorfisma yang dapat digunakan untuk mengonstruksi gelanggang polinom miring. Endomorfisma yang digunakan dalam penelitian ini dipilih agar mempertahankan struktur dasar aljabar matriks riil. Secara khusus, pemetaan ini memberikan lawan (invers terhadap penjumlahan) pada elemen-elemen tertentu dari matriks, tetapi tetap mempertahankan penjumlahan dan perkalian matriks, sehingga memenuhi sifat-sifat endomorfisma. Strategi ini diambil agar struktur gelanggang tetap terjaga dan memungkinkan pembentukan gelanggang polinom miring. Dalam penelitian ini, hasil terkait endomorfisma dan pusat gelanggang polinom miring dituliskan dalam bentuk teorema dan bukti. Adapun strategi matematis yang digunakan untuk membuktikan teorema pusat adalah pendekatan berbasis pada manipulasi aljabar dan identitas komutatif dalam struktur gelanggang polinom miring. Dengan memanfaatkan sifat endomorfisma dan struktur matriks riil, pembuktian dilakukan dengan membuktikan inklusi ganda.

Berikut diberikan beberapa definisi dan notasi untuk mendukung analisis pada penelitian ini.

Definisi 1. (Amir et al., 2024) ***Pusat*** *dari gelanggang R, dinotasikan $Z(R)$, adalah himpunan elemen yang komutatif dengan semua elemen pada gelanggang R,*

$$Z(R) = \{z \in R \mid zr = rz \; \forall r \in R\}$$

Definisi 2. *Fungsi $\sigma: R \to R$ disebut* ***endomorfisma*** *gelanggang jika mempertahankan operasi pada gelanggang, yaitu, untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:*

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b) \text{ (Sifat Penjumlahan)}, \quad \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \text{ (Sifat Perkalian)}.$$

Definisi 3. *Misalkan σ adalah endomorfisma gelanggang R. Fungsi $\delta: R \to R$ disebut* ***σ-derivatif*** *jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:*

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b), \quad \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b.$$

Definisi 4. (Nguefack, 2023) *Misalkan R adalah gelanggang, $\sigma: R \to R$ adalah endomorfisma gelanggang, dan $\delta: R \to R$ adalah σ-derivatif pada R.* ***Gelanggang polinom miring*** *$R[x; \sigma, \delta]$ adalah gelanggang yang terdiri dari polinom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dengan koefisien $a_i \in R$, dimana perkalian didefinisikan sebagai berikut, $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a \in R$.*

Beberapa catatan terkait notasi, notasi $R[x; \sigma]$ berarti gelanggang polinom miring dengan σ-derivatif δ adalah trivial ($\delta = 0$) dan $R[x; \delta]$ berarti gelanggang polinom miring dengan σ adalah pemetaan identitas. Adapun contoh sederhana gelanggang polinom miring telah diilustrasikan oleh Amir (2019). Misalkan $R = M_2(\mathbb{R})$, telah dibuktikan $\sigma: R \to R$ dengan pendefinisian $\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$ adalah endomorfisma. Jadi, $R[x;\sigma]$ adalah gelanggang polinom miring.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Pertama-tama, untuk mengonstruksi gelanggang polinom miring, diperlukan endomorfisma σ. Pemilihan endomorfisma σ pada $M_3(\mathbb{R})$ dalam penelitian ini didasarkan pada tujuan untuk mempertahankan struktur aljabar matriks namun sekaligus menyisipkan sifat nonkomutatif melalui involusi tanda pada entri tertentu. Pemetaan ini merupakan pemetaan dengan memberikan lawan (invers terhadap penjumlahan) tanda pada beberapa entri. Struktur ini dipilih agar operasi σ tetap memenuhi sifat endomorfisma terhadap penjumlahan dan perkalian. Pendekatan serupa telah digunakan dalam penelitian sebelumnya oleh Amir (2019) yang mengkaji involusi tanda terhadap matriks 2×2, dan disini diperluas ke matriks 3×3. Misalkan $R = M_3(\mathbb{R})$, gelanggang matriks riil 3×3 dan definisikan pemetaan $\sigma: R \to R$ dengan:

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & i \end{bmatrix}$$

Teorema 1. *Pemetaan σ adalah endomorfisma gelanggang pada R.*

Bukti. Untuk membuktikan σ adalah endomorfisma, harus diverifikasi sifat penjumlahan dan perkalian.

Misalkan $A, B \in R$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}$, maka

(Sifat Penjumlahan)

$$\begin{aligned} \sigma(A+B) &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ d_1+d_2 & e_1+e_2 & f_1+f_2 \\ g_1+g_2 & h_1+h_2 & i_1+i_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) & c_1+c_2 \\ -(d_1+d_2) & e_1+e_2 & -(f_1+f_2) \\ g_1+g_2 & -(h_1+h_2) & i_1+i_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -d_1 & e_1 & -f_1 \\ g_1 & -h_1 & i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 & c_2 \\ -d_2 & e_2 & -f_2 \\ g_2 & -h_2 & i_2 \end{bmatrix} \\ &= \sigma(A) + \sigma(B) \end{aligned}$$

(Sifat Perkalian)

$$
\begin{aligned}
\sigma(AB) &= \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 & i_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 & i_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \sigma\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 + c_1g_2 & a_1b_2 + b_1e_2 + c_1h_2 & a_1c_2 + b_1f_2 + c_1i_2 \\ d_1a_2 + e_1d_2 + f_1g_2 & d_1b_2 + e_1e_2 + f_1h_2 & d_1c_2 + e_1f_2 + f_1i_2 \\ g_1a_2 + h_1d_2 + i_1g_2 & g_1b_2 + h_1e_2 + i_1h_2 & g_1c_2 + h_1f_2 + i_1i_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1d_2 + c_1g_2 & -(a_1b_2 + b_1e_2 + c_1h_2) & a_1c_2 + b_1f_2 + c_1i_2 \\ -(d_1a_2 + e_1d_2 + f_1g_2) & d_1b_2 + e_1e_2 + f_1h_2 & -(d_1c_2 + e_1f_2 + f_1i_2) \\ g_1a_2 + h_1d_2 + i_1g_2 & -(g_1b_2 + h_1e_2 + i_1h_2) & g_1c_2 + h_1f_2 + i_1i_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ -d_1 & e_1 & -f_1 \\ g_1 & -h_1 & i_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 & c_2 \\ -d_2 & e_2 & -f_2 \\ g_2 & -h_2 & i_2 \end{bmatrix} \\
&= \sigma(A)\sigma(B)
\end{aligned}
$$

Jadi, σ adalah endomorfisma gelanggang pada R. ■

Berdasarkan hasil pada **Teorema 1**, karena σ merupakan endomorfisma pada R, maka dapat dikonstruksi gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$. Selanjutnya, dapat dikarakterisasi pusat gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$. Sebelum menyatakan teorema, dapat dilihat terlebih dahulu fakta terkait $R[x;\sigma]$. Pertama, σ berorde 2, yaitu, σ^2 adalah pemetaan identitas. Kemudian, perhatikan bahwa pusat gelanggang R adalah $Z(R) = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, dengan I adalah matriks identitas. Lebih lanjut, σ tidak mempengaruhi matriks skalar, $\sigma(\lambda I) = \lambda I$.

Teorema 2. *Pusat dari gelanggang $R[x;\sigma]$ adalah*

$$Z(R[x;\sigma]) = \left\{\sum_{k=0}^{n} (\lambda_k I)x^{2k} \;\middle|\; \lambda_k \in \mathbb{R}\right\}$$

dengan I adalah matriks identitas 3×3.

Bukti. Akan dibuktikan dengan menunjukkan dua inklusi:

(i). $\left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k} \mid \lambda_k \in \mathbb{R}\right\} \subseteq Z(R[x;\sigma])$

Misalkan $f(x) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k}$. Tanpa mengurangi perumuman, pembuktian inklusi ini dilakukan dengan mempertimbangkan dua kasus elemen $g(x)$, yaitu $g(x) = A$, dengan $A \in R$ dan $g(x) = x$. Kedua kasus dipilih karena $R[x;\sigma]$ sebagai gelanggang polinomial kiri bebas atas R. Dengan demikian, jika sebuah elemen $f(x)$ komutatif terhadap semua $A \in R$ dan juga terhadap x, maka $f(x)$ akan komutatif terhadap seluruh elemen $R[x;\sigma]$ yang merupakan kombinasi linier dan perkalian dari dua jenis elemen tersebut. Jadi, pembuktian terhadap dua kasus elemen ini cukup untuk menyimpulkan bahwa $f(x) \in Z(R[x;\sigma])$. Sekarang, untuk sembarang $A \in R$, karena $\sigma(\lambda_k I) = \lambda_k I$, maka:

$$f(x)\cdot A=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)\sigma^{2k}(A)x^{2k}=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k A)x^{2k}=A\cdot f(x)$$

Untuk $g(x)=x$, perhatikan bahwa

$$x\cdot f(x)=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k+1}=f(x)\cdot x$$

Jadi, $f(x)$ komutatif dengan semua $A\in R$ dan x, maka $f(x)\in Z(R[x;\sigma])$. Oleh karena itu, $\left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k}\ \middle|\ \lambda_k\in\mathbb{R}\right\}\subseteq Z(R[x;\sigma])$.

(ii). $Z(R[x;\sigma])\subseteq\left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k}\ \middle|\ \lambda_k\in\mathbb{R}\right\}$

Misalkan $h(x)=\sum_{m=0}^{p}A_m x^m\in Z(R[x;\sigma])$, maka $h(x)$ harus komutatif dengan semua $\lambda I\in Z(R)$, sehingga:

$$h(x)\cdot(\lambda I)=\sum_{m=0}^{p}A_m\sigma^m(\lambda I)x^m=\sum_{m=0}^{p}(\lambda A_m)x^m=(\lambda I)\cdot h(x)$$

Ini berlaku untuk setiap λ, maka A_m komutatif dengan λI, mengakibatkan $A_m\in Z(R)=\{\lambda I\}$. Kemudian, $h(x)$ harus komutatif dengan x, sehingga:

$$h(x)\cdot x=\sum_{m=0}^{p}(\lambda_m I)x^{m+1}\quad,\quad x\cdot h(x)=\sum_{m=0}^{p}\sigma(\lambda_m I)x^{m+1}$$

Karena $\sigma(\lambda_m I)=\lambda_m I$, maka diperoleh $h(x)\cdot x=x\cdot h(x)$. Sekarang, agar $h(x)$ komutatif dengan semua $g(x)=\sum_{n=0}^{q}B_n x^n\in R[x;\sigma]$, harus dipenuhi

$$h(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot h(x)$$

atau

$$\sum_{m,n}(\lambda_m I)\sigma^m(B_n)x^{m+n}=\sum_{n,m}B_n\sigma^n(\lambda_m I)x^{n+m}$$

Karena $\sigma^n(\lambda_m I)=\lambda_m I$, maka:

$$\sum_{m,n}(\lambda_m I)\sigma^m(B_n)x^{m+n}=\sum_{n,m}\lambda_m B_n x^{n+m}$$

Leibniz: Jurnal Matematika
Juli 2025
Vol. 5 No. 02 Hal. 11-20
e-ISSN: 2775-2356
https://ejurnal.unisap.ac.id/leibniz/index

Agar persamaan berlaku untuk semua $B_n \in R$, diperlukan $\sigma^m(B_n) = B_n$ ketika $\lambda_m \neq 0$. Karena σ^2 adalah pemetaan identitas, maka σ^m juga pemetaan identitas jika dan hanya jika m adalah bilangan genap. Jadi, $h(x) \in \left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k} \;\middle|\; \lambda_k \in \mathbb{R}\right\}$. Oleh karena itu, $Z(R[x;\sigma]) \subseteq \left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k} \;\middle|\; \lambda_k \in \mathbb{R}\right\}$.

Dari pembuktian (i) dan (ii), diperoleh

$$Z(R[x;\sigma]) = \left\{\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k I)x^{2k} \;\middle|\; \lambda_k \in \mathbb{R}\right\}$$

■

Contoh-contoh

Setelah mengkarakterisasi pusat $Z(R[x;\sigma])$ dari gelanggang polinom miring, akan diberikan contoh elemen spesifik yang akan diverifikasi apakah termasuk dalam pusat atau tidak. Berikut diberikan beberapa contoh.

Contoh 1. *Misalkan $f(x) = 2Ix^2 + 3I$, maka $f(x) \in Z(R[x;\sigma])$. Untuk memverifikasi hal tersebut, dapat diambil polinom acak di R, misalkan $g(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 5 & 13 & -6 \\ -10 & 32 & 24 \\ -8 & -14 & 5 \end{pmatrix}x^3$. Dengan mudah dapat dilihat bahwa $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$.*

Contoh 2. *Misalkan $q(x) = 4Ix^2 + 3Ix + 2I$. Karena terdapat suku dengan derajat ganjil, maka $q(x) \notin Z(R[x;\sigma])$. Untuk memverifikasi hal tersebut, dapat ditinjau perkalian dari beberapa polinom. Misalkan $p(x) = x$, maka*

$$q(x) \cdot p(x) = (4Ix^2 + 3Ix + 2I) \cdot x = 4Ix^3 + 3Ix^2 + 2Ix,$$
$$p(x) \cdot q(x) = x \cdot (4Ix^2 + 3Ix + 2I) = \sigma(4I)x^3 + \sigma(3I)x^2 + \sigma(2I)x = 4Ix^3 + 3Ix^2 + 2Ix$$

Disini, $q(x) \cdot p(x) = p(x) \cdot q(x)$.

Tetapi, jika diambil $t(x) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka

$$q(x) \cdot t(x) = (4Ix^2 + 3Ix + 2I) \cdot A = 4I\sigma^2(A)x^2 + 3I\sigma(A)x + 2I = 4Ax^2 + 3\sigma(A)x + 2A$$
$$t(x) \cdot q(x) = A \cdot (4Ix^2 + 3Ix + 2I) = 4Ax^2 + 3Ax + 2A$$

Karena $\sigma(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$, *maka suku* $3\sigma(A)x \neq 3Ax$. *Oleh karena itu,* $q(x) \cdot t(x) \neq t(x) \cdot q(x)$. *Jadi,* $q(x) \notin Z(R[x;\sigma])$.

Pembahasan

Hasil karakterisasi pusat gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$ menunjukkan bahwa pusat gelanggang terdiri dari polinomial berderajat genap dengan koefisien matriks skalar riil. Struktur ini konsisten dengan intuisi bahwa hanya elemen-elemen berderajat genap yang bersifat invarian terhadap endomorfisma σ dan dapat komutatif dengan seluruh anggota gelanggang polinom miring. Sebagai contoh, polinom $f(x) = 2Ix^2 + 3I$, dengan I adalah matriks identitas 3×3, merupakan elemen pusat karena setiap suku koefisiennya berupa matriks skalar dan berpangkat genap, sehingga memenuhi sifat komutatif terhadap semua elemen pada $R[x;\sigma]$. Hasil ini relevan jika dibandingkan dengan penelitian Amir et al. (2023), yang mengkaji pusat gelanggang polinom miring atas matriks diagonal coquaternion. Mereka mengkarakterisasi pusat atas gelanggang tersebut dan menemukan bahwa bentuk pusat sangat bergantung pada struktur dari endomorfisma. Hasil ini juga sejalan dengan penelitian Amir et al. (2024), dimana mereka mengkaji pusat gelanggang polinom miring atas barisan hingga bilangan riil.

Dengan demikian, hasil penelitian ini memberikan kontribusi dalam karakterisasi pusat gelanggang polinom miring atas gelanggang matriks riil umum 3×3, tidak terbatas pada matriks diagonal atau bentuk khusus lainnya. Penelitian ini menunjukkan bahwa struktur pusat tidak hanya bergantung pada bentuk struktur R, tetapi juga dipengaruhi oleh sifat endomorfisma σ, khususnya ketika R adalah gelanggang matriks berdimensi lebih tinggi. Hasil ini sekaligus membuka arah baru untuk mengkarakterisasi pusat yang lebih umum di gelanggang polinom miring atas gelanggang $M_n(\mathbb{R})$ untuk $n > 3$.

SIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dikarakterisasi pusat $Z(R[x;\sigma])$ dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma]$, dengan $R = M_3(\mathbb{R})$ dan σ adalah endomorfisma yang memberikan lawan (invers terhadap penjumlahan) tanda pada entri-entri spesifik, yaitu $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$. Hasil utama menunjukkan bahwa pusat terdiri tepat dari polinomial berderajat genap dengan koefisien matriks skalar riil. Kebaruan dari penelitian ini terletak pada penerapan pendekatan eksplisit terhadap endomorfisma σ dalam gelanggang matriks riil 3×3, dimana kajian mengenai pusat gelanggang polinom miring sebelumnya lebih banyak dilakukan pada matriks diagonal atau struktur sederhana lainnya. Dengan pendekatan ini, diperoleh struktur pusat yang eksplisit dan dapat diverifikasi secara aljabar. Secara teoretis, hasil ini memperluas pemahaman tentang pusat dalam gelanggang polinom miring yang bersifat nonkomutatif, serta memberikan fondasi baru untuk menjelajahi struktur pusat dalam gelanggang matriks berdimensi lebih tinggi. Secara praktis, temuan ini juga dapat memberi kontribusi dalam desain sistem pengkodean dan kriptografi yang berbasis struktur aljabar nonkomutatif, karena keberadaan pusat yang diketahui memungkinkan kontrol yang lebih baik terhadap elemen-elemen yang stabil dalam transformasi data.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, A. K. (2019). Around zero-divisor graph of skew polynomial rings over real matrix 2 by 2. *Journal of Physics: Conference Series*, *1341*(6). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1341/6/062022

Amir, A. K., Erawaty, N., & Sosang, R. R. W. (2024). CENTER OF THE SKEW POLYNOMIAL RING OF FINITE SEQUENCES OF REAL NUMBERS. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, *141*(3), 169–186. https://doi.org/10.17654/0972087124011

Amir, A. K., Fadhilah, N., & Abdal, A. M. (2023). Center of the skew polynomial ring over coquaternion diagonal matrix. *AIP Conference Proceedings*, *2738*(1), 20002. https://doi.org/10.1063/5.0144727

Ánh, P. N. (2022). Skew Polynomial Rings: the Schreier Technique. *Acta Mathematica Vietnamica*, *47*(1), 5–17. https://doi.org/10.1007/s40306-021-00466-7

Bennenni, N., Benbelkacem, N., Aydin, N., & Liu, P. (2024). Mixed skew cyclic codes over rings. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, *12*(1), 19–29. https://doi.org/10.13069/jacodesmath.v12i1.339

Chan, K., Gaddis, J., Won, R., & Zhang, J. J. (2023). Ozone Groups and Centers of Skew Polynomial Rings. *International Mathematics Research Notices*, *2024*(7), 5689–5727. https://doi.org/10.1093/imrn/rnad235

Chapman, A., & Paran, E. (2024). Fixed points and orbits in skew polynomial rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, *23*(08), 2450078. https://doi.org/10.1142/S0219498824500786

Dertli, A., & Cengellenmis, Y. (2025). Skew codes over the split quaternions. *Malaya Journal of Matematik*, *13*(01), 1–7. https://doi.org/10.26637/mjm1301/001

El Badry, M., Haily, A., & Mounir, A. (2025). On LCD skew group codes. *Designs, Codes and Cryptography*. https://doi.org/10.1007/s10623-024-01561-0

Habibi, M., & Paykan, K. (2025). ON SKEW GENERALIZED TRIANGULAR MATRIX RINGS. *Journal of Algebraic Systems*, *13*(1), 151–162. https://doi.org/10.22044/jas.2023.12285.1654

Lobillo, F. J., & Muñoz, J. M. (2025). Linear complementary pairs of skew constacyclic codes. *Designs, Codes, and Cryptography*. https://doi.org/10.1007/s10623-025-01568-1

Nguefack, B. (2023). THE STRUCTURE OF MATRIX POLYNOMIAL ALGEBRAS. *International Electronic Journal of Algebra*, *33*(33), 137–177. https://doi.org/10.24330/ieja.1151001

Pathak, S., Raj, R., & Maity, D. (2025). Skew negacyclic codes of length $$4p^s$$over $$\mathbb {F}_{p^m} + u\mathbb {F}_{p^m}$$. *Cryptography and Communications*. https://doi.org/10.1007/s12095-025-00779-6

Paykanian, M., Hashemi, E., & Alhevaz, A. (2021). On skew polynomials over Ikeda-Nakayama rings. *Communications in Algebra*, *49*(9), 4038–4049. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1912064

Shahoseini, E., Dastbasteh, R., Dinh, H. Q., & Mousavi, H. (2024). On the structure of ideals in a family of skew polynomial rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, *23*(08), 2450174. https://doi.org/10.1142/S0219498824501743

Werner, N. J. (2021). Integer-valued skew polynomials. *Journal of Algebra and Its Applications*, *20*(07), 2150114. https://doi.org/10.1142/S0219498821501140