



FORMULASI *INFINITESIMAL GENERATORS* GRUP LIE SATU PARAMETER DARI TRANSFORMASI TRANSLASI DAN *SCALING*

Edi Kurniadi^{1,*}, Badrulfalah², Nurul Gusriani³

^{1,2,3}Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Padjadjaran

*email: edi.kurniadi@unpad.ac.id

Abstrak: Grup Lie transformasi dapat dikarakterisasi melalui *infinitesimal generators* yang membentuk aljabar Lie. *Infinitesimal generators* dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP) baik yang linear maupun nonlinear. Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan rumus eksplisit *infinitesimal generators* berkenaan dengan transformasi grup Lie satu parameter. Metode penelitian yang digunakan merupakan kombinasi dari metode kualitatif berupa studi literatur khususnya transformasi translasi dan *scaling* dan metode kuantitatif dengan menentukan rumus eksplisit *infinitesimal generators* dan analisisnya. Hasil yang diperoleh adalah bentuk rumus eksplisit *infinitesimal generators* yang bersesuaian dengan jenis transformasi yang digunakan. Hasil ini bisa digunakan untuk penelitian selanjutnya dalam menyelesaikan model matematika reaksi difusi konveksi (RDK) dalam PDB maupun PDP sebagai salah satu langkah dalam aplikasi simetri Lie.

Kata Kunci: Aksi; Grup Lie; *Infinitesimal Generators*; *Scaling*; Transformasi; Translasi

Abstract: A Lie group of transformations can be characterized through infinitesimal generators that form a Lie algebra. Infinitesimal generators can be applied to solve ordinary differential equations (ODE) and partial differential equations (PDE) either linear or nonlinear. The purpose of this research is to give explicit formula of infinitesimal generators with respect to one-parameter Lie group of transformation. The research method used is combination of a qualitative method by literature review, especially the transformation of translations and scalings and a quantitative method by determining the explicit formula of infinitesimal generator and its analysis. The results obtained are the explicit form of infinitesimal generators corresponding to the type of transformation used. For future research, these results can be used to solve mathematical models of reaction-diffusion-convection (RDC) in ODE and PDE as one of the steps in Lie symmetry application.

Keywords: Action; Lie Group; *Infinitesimal Generators*; *Scaling*; Transformation; Translation

PENDAHULUAN

Shopus Lie seorang matematikawan asal Norwegia telah mengembangkan teori Lie dan aplikasinya dalam berbagai bidang seperti kedokteran, ekologi, ekonomi, biologi, fisika, dan kimia (Bildirici et al., 2022; Cowling, 2023; Hampsey et al., 2024; Lim & Privault, 2016;



Sánchez et al., 2006; E. Zhang & Noakes, 2020). Fenomena-fenomena yang muncul dalam bidang-bidang tersebut dapat dinyatakan menggunakan pemodelan matematika melalui persamaan diferensial (Cherniha et al., 2017) yang sampai dengan akhir abad ke-19 hampir semua model-model matematika tersebut dinyatakan dalam persamaan parsial biasa (PDB) atau persamaan diferensial parsial (PDP) linear. Model-model matematika dalam PDB dan PDP linear merupakan kelemahan karena belum bisa menjelaskan fenomena nyata. Pada awal abad ke-20, model matematika mulai dinyatakan dalam PDP non-linear yang ditandai persamaan reaksi-difusi nonlinear dalam biologi yang pertama kali diusulkan oleh R.A. Fisher (Fisher, 1937, 1999). Model-model matematika dalam PDP nonlinear ini lebih adaptif dalam menjelaskan fenomena nyata berbagai bidang.

Model matematika dengan PDP nonlinear yang paling banyak digunakan dalam memodelkan proses-proses nyata dalam ilmu kedokteran, ekologi, ekonomi, biologi, fisika, dan kimia adalah persamaan reaksi-difusi-konveksi (RDK) nonlinear. Dalam biologi, penelitian-penelitian tentang persamaan RDK nonlinear sudah banyak diteliti (Torrissi & Tracina, 2021) misalnya pemodelan penyebaran penyakit demam berdarah (He & Richter, 2018) dan penyebaran geografisnya melalui gelombang perjalanan (*traveling waves*) (Maidana & Yang, 2008), dalam kimia misalnya tentang *permeable catalysts* (Rosen, 1976) dan simulasi numerik dalam model reaksi oksidasi (Cheng et al., 2023). Bentuk umum persamaan RDK yang sekaligus merupakan PDP nonlinear berorder dua dapat dinyatakan sebagai berikut (Cherniha et al., 2017):

$$u_t = [A(u)u_x]_x + B(u)u_x + C(u), \quad (1)$$

dengan A, B, C merupakan fungsi-fungsi yang diketahui dan u adalah fungsi dua variabel yang tidak diketahui dengan variabel bebasnya t dan x . Notasi u_t dan u_x merupakan turunan parsial dari fungsi u berturut-turut terhadap variabel t dan x . Persamaan RDK (1) dimotivasi dari fenomena nyata seperti dalam kedokteran, ekologi, ekonomi, biologi, fisika, dan kimia. Sebagai contoh, persamaan (1) dapat dianggap sebagai model matematika yang menggambarkan penyebaran nyamuk *Aedes Aegypti* yang merupakan vektor utama penyebaran penyakit demam berdarah. Dalam kasus ini, persamaan RDK-PDP nonlinearnya dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut (Torrissi & Tracina, 2021):

$$\begin{cases} u_t = [A(u)u_x]_x + B(u, v, u_x), \\ v_x = C(u, v), \end{cases} \quad (2)$$

dengan $A(u)$ koefisien difusi, $B(u, v, u_x)$ reaksi-konveksi, dan $C(u, v)$ reaksi. Contoh lainnya, persamaan (1) dapat dimaknai terkait model biomedik dimana fungsi $u(t, x)$ ini dapat ditafsirkan sebagai konsentrasi sel seperti obat, molekul, dan populasi. Fungsi-fungsi A, B , dan C erat kaitannya dengan proses mekanisme transportasi yaitu reaksi-difusi-konveksi.

Persamaan RDK nonlinear baik dalam persamaan (1) dan (2) perlu diselesaikan untuk menjelaskan proses yang terjadi. Pada prinsipnya persamaan tersebut dapat diselesaikan baik



secara eksak atau numerik. Namun demikian, solusi eksak akan lebih mendekati akurasi untuk menjelaskan proses-proses yang terjadi jika dibandingkan dengan solusi numerik. Salah satu metode penyelesaian RDK nonlinear secara eksak diusulkan pertama kali oleh seorang matematikawan asal Norwegia bernama Shopus Lie (17 Desember 1842-18 Februari 1899) melalui transformasi grup Lie dan lebih dikenal sekarang ini dengan simetri Lie. Sejauh ini, metode-metode klasik seperti metode Fourier, metode fungsi Green, dan metode transformasi Laplace belum bisa digunakan untuk mendapatkan solusi eksak RDK nonlinear (Cherniha et al., 2017). Konstruksi solusi eksak persamaan PDK (1) merupakan persoalan yang tidak mudah dan sangat penting, karena dengan menemukan solusi eksak maka secara signifikan proses-proses nyata dalam kedokteran, ekologi, ekonomi, biologi, fisika, dan kimia, dapat dijelaskan dengan sangat baik melalui interpretasi-interpretasi dari solusi eksaknya.

Salah satu langkah dalam metode simetri Lie untuk memperoleh solusi eksak persamaan RDK (1) adalah *infinitesimal generators*. Hasil utama dalam penelitian ini termotivasi oleh penelitian sebelumnya terkait konstruksi *infinitesimal generators* (G. W. Bluman & Kumei, 2002), namun dalam penelitian ini diberikan bukti lengkapnya. Perumusan metode simetri Lie melalui *infinitesimal generators* dilakukan oleh Bluman dan Cole melalui persamaan panas linear berdimensi $1 + 1$ yang berbentuk $u_t = u_{xx}$ (G. W. , Bluman & Cole, 1969). Metode ini kemudian dikenal sebagai metode simetri nonklasik yang bisa digunakan untuk menyelesaikan PDP (Bradshaw-Hajek, 2019; Broadbridge & Arrigo, 1999). Simetri nonklasik ini kemudian dinamakan simetri bersyarat atau *conditional Symmetrie* dan penelitian tentang simetri bersyarat terus dikembangkan untuk mendapatkan solusi eksak dari salah satu proses RDK (Cherniha et al., 2023; Cherniha & Pliukhin, 2013; Z.-Y. Zhang et al., 2023). Penelitian terkait teori Lie dan solusi persamaan RDK dari model biomatematika (Freire & Torrisi, 2014; Torrisi & Traciná, 2021) memotivasi untuk memperluas hasil penelitian sebelumnya untuk model-model biomatematika lainnya khususnya yang terkait persamaan RDK nonlinear. Oleh karena itu, konstruksi *infinitesimal generators* sangat penting dilakukan agar metode simetri Lie bisa digunakan. Dalam penelitian ini, diformulasikan rumus eksplisit *infinitesimal generators* grup Lie satu parameter yang berasal dari transformasi translasi dan *scaling*.

METODE PENELITIAN

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini berupa studi literatur terkait konsep aksi grup Lie dan grup Lie transformasi yaitu translasi dan *scaling*. Langkah pertama diberikan transformasi berupa translasi dan *scaling*. Langkah kedua membuktikan bahwa transformasi tersebut mendefinisikan grup Lie satu parameter. Langkah ketiga menentukan rumus eksplisit *infinitesimal generator* berkaitan dengan grup Lie satu parameter dari transformasi translasi dan *scaling*. Konsep simetri Lie berasal dari transformasi grup Lie. Beberapa notasi dasar terkait penerapan transformasi Lie grup dalam penyelesaian persamaan diferensial (G. W. Bluman & Kumei, 2002; Olver, 1986) dapat dibahas ulang sebagai berikut:



Definisi 1 (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Misalkan $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dan misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ dilengkapi oleh pemetaan komposisi

$$\psi: S \times S \ni (s_1, s_2) \mapsto \psi(s_1, s_2) \in S. \quad (3)$$

Aksi S pada D diberikan oleh persamaan

$$X: D \times S \ni (\bar{x}; \varepsilon) \mapsto X(\bar{x}; \varepsilon) =: \bar{x}^* \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Suatu grup transformasi $\mathfrak{G}$ dari semua transformasi X pada D dikatakan transformasi grup Lie satu-parameter jika $X \in C^\infty(D)$ dan ψ fungsi-fungsi analitik dan S adalah interval di $\mathbb{R}$.

Contoh 2 (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Misalkan $D = \mathbb{R}^2$ dan $S \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan X suatu transformasi yang didefinisikan oleh

$$X: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{x} = (x, y); \varepsilon) \mapsto \bar{x}^* = (x + \varepsilon, y). \quad (5)$$

Himpunan $\mathfrak{G} = \{X; X \text{ dalam persamaan (3)}\}$ adalah transformasi grup Lie satu-parameter. Untuk setiap $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, diperoleh $\psi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$. Dengan demikian, dapat dipilih suatu subhimpunan S sehingga $(S, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$ dan untuk setiap $\varepsilon \in S$, inversnya diberikan oleh $-\varepsilon$. Selanjutnya karena untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $X(\bar{x}_1; \varepsilon) = \bar{x}_1^* = X(\bar{x}_2; \varepsilon) = \bar{x}_2^*$ mengakibatkan $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, maka X pemetaan satu-satu. Lebih jauh, untuk setiap $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, dapat dipilih $x = p - \varepsilon$ dan $y = q$, sehingga X bersifat pada $\mathbb{R}^2$. Karena fungsi X linear maka $X \in C^\infty(D)$ dan ψ analitik serta S suatu interval di $\mathbb{R}$. Jadi, $\mathfrak{G}$ transformasi grup Lie satu-parameter

Komentar 3. Jika transformasi X dalam persamaan (5), $\mathfrak{G}$ disebut grup translasi, maka himpunan $\mathfrak{G}' = \{X; X \text{ dalam persamaan (5')}\}$ yang memuat semua transformasi X yang didefinisikan berikut ini

$$X: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{x} = (x, y); \varepsilon) \mapsto \bar{x}^* = (x + 3\varepsilon, y + 2\varepsilon), \quad (5')$$

juga merupakan transformasi grup Lie satu-parameter.

Contoh 4 (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Misalkan $D = \mathbb{R}^2$ dan $S = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan X suatu transformasi yang didefinisikan oleh

$$X: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{x} = (x, y); \alpha) \mapsto \bar{x}^* = (\alpha x, \alpha^2 y). \quad (6)$$

Himpunan $\mathfrak{G} = \{X; X \text{ dalam persamaan (6)}\}$ adalah transformasi grup Lie satu-parameter. Untuk setiap $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, diperoleh $\psi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon\delta$. Maka pilih suatu subhimpunan S sedemikian sehingga $(S, +)$ grup dengan identitas $e = 1$ dan untuk setiap $\varepsilon \in S$, inversnya diberikan oleh $1/\varepsilon$. Jadi, $\mathfrak{G}$ transformasi grup Lie satu-parameter.

Komentar 5. Dalam kasus transformasi X dalam persamaan (4), $\mathfrak{G}$ dinamakan grup skala.

Contoh 6 (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Misalkan $D = \mathbb{R}^2$ dan $S \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan X suatu transformasi yang didefinisikan oleh

$$X: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{x} = (x, y); \varepsilon) \mapsto \bar{x}^* = (x - \varepsilon y, y + \varepsilon x). \quad (7)$$



Himpunan $\mathfrak{G} = \{X; X \text{ dalam persamaan (7)}\}$ bukan transformasi grup Lie satu-parameter. Untuk setiap $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, maka:

$$\bar{x}^{**} = X(\bar{x}^*; \delta) = (x - \varepsilon\delta x - (\varepsilon + \delta)y, y - \varepsilon\delta y + (\varepsilon + \delta)y).$$

Di sisi lain, karena $\bar{x}^{**} = X(\bar{x}; \psi(\varepsilon, \delta)) = (x - \psi(\varepsilon, \delta)y, y + \psi(\varepsilon, \delta)x)$ maka tidak terdapat $\psi(\varepsilon, \delta)$ sedemikian sehingga $\bar{x}^{**} = X(\bar{x}^*; \delta) = X(\bar{x}; \psi(\varepsilon, \delta))$. Jadi, $\mathfrak{G}$ bukan transformasi grup Lie satu-parameter.

Notasi lain terkait simetri Lie adalah transformasi infinitesimal dan infinitesimal $\bar{x}^* = X(\bar{x}; \varepsilon)$. Diberikan transformasi grup Lie satu-parameter (ε) berbentuk $X: S \times D \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\bar{x}^* = X(\bar{x}; \varepsilon). \quad (8)$$

dengan identitas dan pemetaan komposisi dalam S diberikan oleh $\varepsilon = 0$ dan ψ masing-masing. Ekspansi persamaan (8) di $\varepsilon = 0$, maka:

$$\bar{x}^* = \bar{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\bar{x}; \varepsilon)|_{\varepsilon=0} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (9)$$

Denisi 7 (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Misalkan

$$\xi(\bar{x}) = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(\bar{x}; \varepsilon)|_{\varepsilon=0} \quad (10)$$

maka:

1. $\bar{x}^* = \bar{x} + \varepsilon \xi(\bar{x}; \varepsilon)$ disebut transformasi infinitesimal untuk persamaan (8).
2. Persamaan (10) disebut infinitesimal dari persamaan (8).

Teorema 8 (G. W. Bluman & Kumei, 2002).

$$X(\bar{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon) = X(X(\bar{x}; \varepsilon); \psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)). \quad (11)$$

Bukti. Dengan menghitung langsung diperoleh

$$\begin{aligned} X(X(\bar{x}; \varepsilon); \psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) &= X(\bar{x}; \psi(\varepsilon, \psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))) \\ &= X(\bar{x}; \psi(\psi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= X(\bar{x}; \psi(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= X(\bar{x}; \varepsilon + \Delta\varepsilon). \end{aligned}$$

■

Teorema 9 [Teorema Dasar Pertama Lie](G. W. Bluman & Kumei, 2002). Terdapat parameterisasi $\tau(\varepsilon)$ sedemikian sehingga transformasi grup Lie $x^* = X(\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon))$ ekuivalen terhadap solusi masalah nilai awal untuk sistem persamaan diferensial berorder satu



$$\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*), \quad (12)$$

dengan $x^* = x$ if $\tau = 0$.

Khususnya diperoleh

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon') d\varepsilon', \quad (13)$$

dimana $\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial \psi(a,b)}{\partial b} \big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$, and $\Gamma(0) = 1$. Infinitesimal generatornya diberikan oleh persamaan $\xi_i(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Hasil utama dalam penelitian ini dinyatakan dalam 2 proposisi. Proposisi 1 menyatakan *infinitesimal generator* dari grup Lie satu parameter dari suatu translasi dan hasilnya mengkonfirmasi hasil sebelumnya (G. W. Bluman & Kumei, 2002). Selanjutnya, Proposisi 2 menyatakan *infinitesimal generator* dari grup Lie satu parameter dari suatu *scaling* dan hasilnya juga mengkonfirmasi hasil sebelumnya (G. W. Bluman & Kumei, 2002).

Proposisi 1. Misalkan $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dan $\varepsilon, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. Translasi $\bar{x}^* = X(\bar{x}; \varepsilon)$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} x^* &= x + \tau_1 \varepsilon \\ y^* &= y + \tau_2 \varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

mendefinisikan suatu grup Lie transformasi dengan *infinitesimal generators*-nya berbentuk

$$X = \tau_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (15)$$

Bukti. Pertama kita buktikan dulu bahwa Himpunan $\mathfrak{G} = \{X; X \text{ dalam persamaan (14)}\}$ adalah transformasi grup Lie satu-parameter. Perhatikan bahwa $X(\bar{x}^*; \delta) = (x + \tau_1 \varepsilon + \tau_1 \delta, y + \tau_2 \varepsilon + \tau_2 \delta)$ untuk setiap $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$. Oleh karenanya, $\bar{x}^{**} = X(\bar{x}; \phi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta)$. Dengan kata lain, diperoleh $\psi(\varepsilon, \delta) = \varepsilon + \delta$. Selanjutnya pilih suatu subhimpunan S sedemikian sehingga $(S, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$ dan untuk setiap $\varepsilon \in S$, inversnya diberikan oleh $-\varepsilon$. Selanjutnya karena untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $X(\bar{x}_1; \varepsilon) = \bar{x}_1^* = X(\bar{x}_2; \varepsilon) = \bar{x}_2^*$ mengakibatkan $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, maka X pemetaan satu-satu. Lebih jauh, untuk setiap $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, dapat dipilih $x = p - \varepsilon$ dan $y = q$, sehingga X bersifat pada $\mathbb{R}^2$. Karena fungsi X linear maka $X \in C^\infty(D)$ dan ψ analitik serta S suatu interval di $\mathbb{R}$. Jadi, $\mathfrak{G}$ transformasi grup Lie satu-parameter

Dengan menggunakan Teorema Dasar Pertama Lie, diperoleh bahwa:



$$\xi(x) = \frac{\partial X}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = (\xi_1(x, y), \xi_2(x, y)) = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} \right) = (\tau_1, \tau_2).$$

Oleh karena itu, *infinitesimal generators* diberikan oleh persamaan

$$X = \tau_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Hasil berikut merupakan perluasan dari transformasi *scaling* $X = X(\bar{x}; \tau) = (\tau x, \tau^2 y)$ (G. W. Bluman & Kumei, 2002), bukti detailnya diberikan dalam Proposisi 2 sebagai berikut:

Proposisi 2. Misalkan $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dan $\varepsilon, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. *Scaling* $\bar{x}^* = X(\bar{x}; \tau)$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} x^* &= (1 + \tau)x \\ y^* &= (1 + \tau)^2 y \end{aligned} \quad (16)$$

dengan $\tau \in \mathbb{R}, \tau > -1$ ($-1 < \tau < \infty$) mendefinisikan suatu grup Lie transformasi dengan *infinitesimal generators* diberikan oleh persamaan

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} \quad (17)$$

Bukti. Pertama dibuktikan bahwa $\mathfrak{S}' = \{X; X \text{ dalam persamaan (16)}\}$ adalah transformasi grup Lie satu-parameter.

Karena $\bar{x}^* = X(\bar{x}; \tau) = ((1 + \tau)x, (1 + \tau)^2 y)$ maka

$$\begin{aligned} \bar{x}^{**} &= X(\bar{x}^*; \delta) = ((1 + \tau)(1 + \delta)x, (1 + \tau)^2(1 + \delta)^2 y) \\ &= ((1 + \tau + \delta + \tau\delta)x, (1 + \tau + \delta + \tau\delta)^2 y) = X(\bar{x}; \phi(\tau, \delta)). \end{aligned}$$

Jadi, aturan komposisinya diberikan oleh $\phi(\tau, \delta) = \tau + \delta + \tau\delta$.

Untuk menentukan rumus eksplisit identitas e , perhatikan persamaan $\phi(e, \delta) = \delta$.

$\phi(e, \delta) = e + \delta + e\delta = \delta$. Hal ini mengakibatkan, $e = \frac{\delta}{1 + \delta}, -1 < \delta < \infty$. Rumus eksplisit

untuk τ^{-1} diperoleh dari persamaan $\phi(\tau^{-1}, \tau) = \frac{\delta}{1 + \delta}$, yaitu $\tau^{-1} = -\frac{\tau^2}{(1 + \tau)^2}$. Sifat yang lain dapat

dibuktikan dengan cara yang sama seperti pada proposisi 1. Oleh karena itu, $\mathfrak{S}' = \{X; X \text{ dalam persamaan (16)}\}$ adalah transformasi grup Lie satu-parameter.

Dengan menggunakan Teorema Dasar Pertama Lie, diperoleh bahwa:

$$\xi(x) = \frac{\partial X}{\partial \tau}(x, \tau)|_{\tau=0} = (\xi_1(x, y), \xi_2(x, y)) = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \tau}(x, \tau)|_{\tau=0}, \frac{\partial y^*}{\partial \tau}(x, \tau)|_{\tau=0} \right) = (x, 2y).$$

Oleh karena itu, *infinitesimal generators* diberikan oleh persamaan

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pembahasan



Beberapa penelitian telah membahas mengenai aplikasi simetri Lie dalam menyelesaikan model matematika dalam bentuk PDP non-linear (Bradshaw-Hajek, 2019; Cherniha et al., 2017; Cherniha & Davydovych, 2017; Cherniha & Pliukhin, 2013; Orhan et al., 2019). Tentu saja metode ini melibatkan *infinitesimal generator* grup Lie satu parameter dari suatu transformasi. Penelitian ini memberikan pendahuluan untuk mempelajari lebih lanjut simetri dalam menyelesaikan model matematika berbentuk PDP non-linear.

Dari hasil di atas, formulasi *infinitesimal generators* dapat mendefinisikan transformasi grup Lie satu-parameter. Hal ini sangat beralasan karena faktanya $(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = (e^{\psi X} \bar{x}, e^{\psi X} \bar{y})$. Oleh karena itu, *infinitesimal generators* dapat digunakan untuk memperoleh transformasi grup Lie satu-parameter. Perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 3. Diberikan suatu *infinitesimal generators* berikut ini:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Menggunakan deret kuasa untuk $\bar{x}^* = e^{\psi X} \bar{x}$ maka :

$$x^* = x + \frac{\psi}{1!} Xx + \frac{\psi^2}{2!} X^2x + \frac{\psi^3}{3!} X^3x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^k}{k!} X^k x = e^{\psi X} x,$$

dengan $Xx = x, X^2x = x, \dots, X^k x = x$.

Dengan menggunakan cara yang sama untuk $\bar{y}^* = e^{\psi X} \bar{y}$ maka:

$$y^* = y + \frac{\psi}{1!} Xy + \frac{\psi^2}{2!} X^2y + \frac{\psi^3}{3!} X^3y + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^k}{k!} X^k y = (\cosh \psi - \sinh \psi) y,$$

dengan $Xy = -y, X^3y = -y, \dots, X^{2k+1}y = -y$ dan $X^2y = y, X^4y = y, \dots, X^{2k}y = y$. Oleh karena itu, transformasi grup Lie satu-parameternya diberikan oleh $X(\bar{x}; \psi) = (e^{\psi X}, (\cosh \psi - \sinh \psi) y)$.

SIMPULAN

Infinitesimal generators merupakan salah satu langkah dalam metode simetri Lie untuk menyelesaikan model-model matematika secara eksak. *Infinitesimal generators* dapat diperoleh dari transformasi grup Lie satu-parameter atau sebaliknya. Khususnya berkaitan dengan transformasi translasi persamaan (14), *Infinitesimal generators*-nya diberikan oleh persamaan

$$X = \tau_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Selanjutnya *Infinitesimal generators* berkaitan dengan transformasi *scaling* persamaan (16) diberikan oleh persamaan

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$



Penelitian ini dapat dijadikan dasar untuk penelitian selanjutnya, khususnya terkait penyelesaian model matematika reaksi difusi konveksi (RDK) berbentuk PDP non-linear menggunakan metode simetri Lie.

DAFTAR PUSTAKA

- Bildirici, M., Ucan, Y., & Lousada, S. (2022). Interest Rate Based on The Lie Group $SO(3)$ in the Evidence of Chaos. *Mathematics*, 10(21), 3998. <https://doi.org/10.3390/math10213998>
- Bluman, G. W., & Cole, J. D. (1969). The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech.*, 18(1), 1025–1042.
- Bluman, G. W., & Kumei, S. (2002). *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* (Vol. 154). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/b97380>
- Bradshaw-Hajek, B. (2019). Nonclassical Symmetry Solutions for Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations. *Symmetry*, 11(2), 208. <https://doi.org/10.3390/sym11020208>
- Broadbridge, P., & Arrigo, D. J. (1999). All Solutions of Standard Symmetric Linear Partial Differential Equations Have Classical Lie Symmetry. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 234(1), 109–122. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6331>
- Cheng, Z., Wang, T., Bai, Z., Wang, L., Yuan, C., Zhao, Z., & Song, W. (2023). A numerical simulation investigation on low permeability reservoirs air flooding: Oxidation reaction models and factors. *Geoenergy Science and Engineering*, 223, 211506. <https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.211506>
- Cherniha, R., & Davydovych, V. (2017). *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems* (Vol. 2196). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-65467-6>
- Cherniha, R., Davydovych, V., & King, J. R. (2023). The Shigesada–Kawasaki–Teramoto model: Conditional symmetries, exact solutions and their properties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 124, 107313. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107313>
- Cherniha, R., & Pliukhin, O. (2013). New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403(1), 23–37. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.02.010>
- Cherniha, R., Serov, M., & Pliukhin, O. (2017). *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315154848>
- Cowling, M. G. (2023). Decay estimates for matrix coefficients of unitary representations of semisimple Lie groups. *Journal of Functional Analysis*, 285(8), 110061. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2023.110061>
- Fisher, R. A. (1937). The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Annals of Eugenics*, 7(4), 355–369. <https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x>
- Fisher, R. A. (1999). *Natural selection* (R. A. Fisher, Ed.). Oxford University Press Oxford. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198504405.001.0001>
- Freire, I. L., & Torrisi, M. (2014). Weak Equivalence Transformations for a Class of Models in Biomathematics. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2014/546083>
- Hampsey, M., van Goor, P., Banavar, R., & Mahony, R. (2024). Exploiting Equivariance in the Design of Tracking Controllers for Euler-Poincare Systems on Matrix Lie Groups. *IFAC-PapersOnLine*, 58(6), 333–338. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.08.303>



- He, W., & Richter, O. (2018). Modelling Large Scale Invasion of *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus* Mosquitoes. *Advances in Pure Mathematics*, 08(03), 245–265.
<https://doi.org/10.4236/apm.2018.83013>
- Lim, N., & Privault, N. (2016). Analytic bond pricing for short rate dynamics evolving on matrix Lie groups. *Quantitative Finance*, 16(1), 119–129.
<https://doi.org/10.1080/14697688.2014.990497>
- Maidana, N. A., & Yang, H. M. (2008). Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves. *Mathematical Biosciences*, 215(1), 64–77.
<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.05.008>
- Olver, P. J. (1986). *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Vol. 107). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0274-2>
- Orhan, Ö., Torrisi, M., & Tracina, R. (2019). Group methods applied to a reaction-diffusion system generalizing Proteus Mirabilis models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 70, 223–233. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.10.013>
- Rosen, G. (1976). The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: Questions of uniqueness, stability, and transient behavior. *Bulletin of Mathematical Biology*, 38(1), 95–96. [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(76\)80048-1](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(76)80048-1)
- Sánchez, R., Grau, R., & Morgado, E. (2006). A novel Lie algebra of the genetic code over the Galois field of four DNA bases. *Mathematical Biosciences*, 202(1), 156–174.
<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2006.03.017>
- Torrisi, M., & Tracina, R. (2021). Lie Symmetries and Solutions of Reaction Diffusion Systems Arising in Biomathematics. *Symmetry*, 13(8), 1530.
<https://doi.org/10.3390/sym13081530>
- Zhang, E., & Noakes, L. (2020). Riemannian cubics in quadratic matrix Lie groups. *Applied Mathematics and Computation*, 375, 125082. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125082>
- Zhang, Z.-Y., Zhang, H., Liu, Y., Li, J.-Y., & Liu, C.-B. (2023). Generalized conditional symmetry enhanced physics-informed neural network and application to the forward and inverse problems of nonlinear diffusion equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 168, 113169. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113169>