Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 04, Nomor 02, Halaman 10–22
Juli 2024

ANALISIS KEAKURATAN METODE NUMERIK DALAM MENYELESAIKAN TURUNAN PERSAMAAN NONLINIER

Maria Herlina Frida Tukan[1,*], Osniman Paulina Maure[2], Kristina Trisnawati Dau Ina[3]

[1,2] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas San Pedro*
[*] *email:* tukanherlina02@gmail.com

Abstrak: Kasus penyelesaian turunan numerik suatu persamaan nonlinier sering ditemukan di bidang sains dan teknik. Turunan numerik persamaan nonlinear tersebut sulit ditentukan secara analitik, sehingga memerlukan pendekatan numerik. Turunan numerik yang dapat digunakan dalam kasus menyelesaikan turunan yaitu menggunakan metode *beda maju*, metode beda mundur, dan metode beda pusat. Tujuan penelitian ini yaitu membandingkan tingkat keakuratan dari metode *beda maju*, metode beda mundur, dan metode beda pusat dalam menyelesaikan persamaan nonlinear berbentuk polinomial,eksponensial dan trigonometri. Hasil dari ketiga metode ini kemudian dibandingkan dengan nilai eksaknya, sehingga diperoleh *error* mutlaknya. Berdasarkan hasil penelitian menunjukkan bahwa pada kasus persamaan nonlinear bentuk polinomial, eksponensial dan trigonometri, metode beda pusat memiliki *error* mutlak terkecil dibandingkan dengan metode beda maju dan metode beda mundur, yaitu sebesar 0,00043, 0,00022, dan 0,00292. Dengan demikian, metode numerik yang akurat dalam menyelesaikan turunan yaitu metode beda pusat.
Kata Kunci: turunan numerik, persamaan nonlinear, galat

Abstract: *The case of solving numerical derivatives of a nonlinear equation is often found in the fields of science and engineering. The numerical derivatives of these nonlinear equations are difficult to determine analytically, requiring a numerical approach. Numerical derivatives that can be used in solving derivatives include the forward difference method, the backward difference method, and the central difference method. The aim of this research is to compare the accuracy levels of the forward difference method, the backward difference method, and the central difference method in solving nonlinear equations of polynomial, exponential, and trigonometric forms. The results of these three methods*

are then compared with the exact values to obtain the absolute error. Based on the research results, it shows that in the case of nonlinear equations in the form of polynomials, exponentials, and trigonometry, the central difference method has the smallest absolute error compared to the forward difference method and the backward difference method, namely 0.00043, 0.00022, and 0.00292. So, an accurate numerical method for solving derivatives is the central difference method.
Keywords: *numerical derivative, nonlinear equation, error*

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari sangat banyak persoalan di kehidupan yang dapat dimodelkan dengan turunan numerik. Turunan numerik adalah teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi perhitungan (Atmika, 2016). Dalam turunan numerik dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang banyak. Sehingga dalam prakteknya dibutuhkan bantuan komputer untuk menyelesaikan perhitungan. Berbagai masalah dalam ilmu dapat digambarkan secara matematis dari berbagai fenomena yang kompleks. Untuk menyederhanakannya, diperlukan asumsi. Walaupun telah dilakukan penyederhanaan, namun sering kali persamaan tersebut tidak bisa diselesaikan secara analitis. Untuk itu diperlukan turunan numerik untuk menyelesaikannya

Metode numerik adalah suatu teknik hampiran penyelesaian dari suatu masalah matematika yang sulit dan bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik Darmawan pada tahun 2016. Metode numerik menghasilkan penyelesaian hampiran yang tidak persis sama dengan penyelesaian sebenarnya, namun tingkat keakuratannya dapat dilihat dari error yang sekecil mungkin Ermawati, dkk., pada tahun 2017. Secara umum perhitungan pada metode numerik dilakukan dengan iterasi yang bertujuan untuk menghasilkan ketelitian yang akurat (Maure & Mungkasi, 2021).

Persoalan turunan numerik ialah menentukan hampiran nilai turunan fungsi f yang diberikan dalam bentuk $f(x)$ (Munir, 2011). Banyak sekali persoalan di kehidupan ini yang dapat dimodelkan oleh turunan numerik karena banyak fungsi yang turunannya sulit dihitung secara eksak, maka diperlukan cara atau pendekatan lain. Salah satu cara adalah komputasi matematika untuk turunan yang disebut turunan numerik. Nilai turunan hasil perhitungan numeris merupakan nilai pendekatan yang artinya nilai turunan mempunyai *error* dan galat. Pendekatan numerik dikatakan akurat jika *error*nya kecil.

Hal penting dalam penyelesaian turunan secara numerik adalah menentukan hampiran turunan fungsi. Pada metode ini domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah interval dan rumus hampiran untuk turunan diperoleh dari suatu ekspansi Mathews, Jhon and Fink pada tahun 1992 (Putra et al., 2023). Berdasarkan letak lokasi titik partisi metode beda hingga yang sering digunakan untuk menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Kurnia Sari, 2017). Metode beda hingga adalah salah satu metode numerik yang bisa dipakai dalam menyelesaikan persoalan teknis dan masalah matematika dari suatu gelaja fisik, dimana prinsipnya adalah mengganti turunan (Ningsi et al., 2020).

Algoritma rekursif membutuhkan memori komputasi yang semakin besar untuk tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi karena melibatkan jumlah data (titik-titik partisi) yang semakin banyak (Kurnia Sari, 2017). Oleh karena itu digunakan suatu rumus eksplisit untuk menghitung hampiran turunan dari suatu fungsi pada beda maju, beda mundur, dan beda pusat. Penggunaan rumus eksplisit akan menghasilkan hampiran turunan dengan orde ketelitian yang sangat tinggi dan dapat dicapai dengan mudah tanpa melibatkan perhitungan secara rekursif. Semakin tinggi orde ketelitian dalam mendekati suatu turunan, maka nilai perkiraan yang dihasilkan semakin tepat (Putra et al., 2023).

Bentuk eksplisit dari rumus beda hingga sudah diformulasikan oleh Khan dan Ohba pada tahun 1999 (H. Syafwan et al., 2018). Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi dimana $f(x)$ berada dititik $x = x_0$. Metode beda hingga lebih mudah dari segi pemrograman dengan komputer dan konsepnya pun tidak sulit untuk di pahami (Yulianto et al., 2016).

METODE PENELITIAN

Turunan numerik adalah limit dari hasil bagi selisih yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar $((f(x+h) - f(x))$. Pada penelitian ini ada 3 pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan turunan numerik pada turunan pertama suatu fungsi yaitu metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat.

Algoritma dalam mencari akar dengan metode beda maju, beda mundur, dan beda pusat:

1. Definisikan fungsi $f(x)$ yang akan dicari nilai turunannya.
2. Definisikan fungsi turunan f eksak (x) sebenarnyas
3. Masukan nilai pendekatan awal; batas bawah a dan batas atas b dan nilai step h
4. Untuk $x = a$ sampai b dihitung dengan menggunakan rumus metode beda maju, metode beda mundur dan metode beda pusat.

Berikut ini diuraikan rumus metode beda maju, metode beda mundur dan metode beda pusat sebagai berikut:

a) Metode Beda Maju

Dalam menyelesaikan turunan numeris dengan menggunakan metode beda maju, maka akan digunakan rumus:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dengan galat $o\ (h)$, maka dapat ditulis (M. Syafwan, 2018):

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

b) Metode Beda Mundur

Dalam menyelesaikan turunan numeris dengan menggunakan metode beda mundur, maka akan digunakan rumus:

$$f'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

dengan galat $o\ (h)$, maka dapat ditulis (M. Syafwan, 2018):

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

c) Metode Beda Pusat

Dalam menyelesaikan turunan numeris dengan menggunakan metode beda pusat,maka akan digunakan rumus:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

dengan galat $o\ (h)$, maka dapat ditulis (M. Syafwan, 2018):

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Dipandang ketiga persamaan nonlinear dalam bentuk polinomial, eksponensial dan trigonometri sebagai berikut.

$f(x) = \dfrac{6x^4 + 2x^3 - 10x - 7}{4x^3 - 2x + 6}$ di titik $x = 1$ dengan $h = 0{,}01$...................... (1)

$f(x) = 12x^4 \times 7e^{-4x}$ di titik $x = 1$ dengan $h = 0{,}01$...................... (2)

$f(x) = \dfrac{6 \cos 2x}{x^{3/4} - 5}$ di titik $x = 1$ dengan $h = 0{,}01$...................... (3)

Pada penelitian ini akan dicari turunan dari persamaan (1), (2), dan (3) dengan menggunakan metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat.

1. Persamaan (1)

Metode Beda Maju

Akan dicari nilai $f(x) = f(1)$ dan $f(x + h) = f(1 + 0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(1) = \frac{6 + 2 - 10 - 7}{4 - 2 + 6} = \frac{-9}{8} = -1{,}125$$

$$f(1 + 0{,}01) = \frac{6x^4 + 2x^3 - 10x - 7}{4x^3 - 2x + 6} = -1{,}0857361449$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x+h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(-1{,}0857361449)-(-1{,}125)}{0{,}01} = 3{,}92638551.$$

Metode Beda Mundur

Akan dicari nilai dari $f(x) = f(1)$ dan $f(x-h) = f(1-0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(1-0{,}01) = \frac{6(0{,}99^4)+2(0{,}99^3)-10(0{,}99)-7}{4(0{,}99^3)-2(0{,}99)+6} = -1{,}1638529154$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x-h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$f'(x_0) = \frac{(-1{,}125)-(-1{,}1638529154)}{0{,}01} = 3{,}88524.$$

Metode Beda Pusat

Nilai dari $f(x+h) = f(1+0{,}01)$ dan $f(x-h) = f(1-0{,}01)$ disubstitusikan pada rumus metode beda pusat sebagai berikut.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

sehingga diperoleh,

$$f'(x_0) = \frac{(-1{,}857361449)-(-1{,}1638529154)}{2{,}02} = 3{,}905789.$$

Secara umum perhitungan turunan numerik dari persamaan (1) di atas dapat diuraikan pada Tabel 1-3 di bawah ini.

Tabel 1. Metode Beda Maju

i	x	$x+h$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f'(x)$
0	1	1,01	-1,125	-1,0857	3,92634
1	1,01	1,02	-1,0857	-1,0461	3,96468
2	1,02	1,03	-1,0461	-1,0061	4,00032
3	1,03	1,04	-1,0061	-0,9658	4,03329
4	1,04	1,05	-0,9658	-0,9251	4,06365
5	1,05	1,06	-0,9251	-0,8842	4,09144
6	1,06	1,07	-0,8842	-0,843	4,11672
7	1,07	1,08	-0,843	-0,8016	4,13954
8	1,08	1,09	-0,8016	-0,76	4,15998

9	1,09	1,1	-0,76	-0,7183	4,17809
10	1,1	1,11	-0,7183	-0,6763	4,19394

Tabel 2. Metode Beda Mundur

i	x	h	$x-h$	$f(x)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	0,99	-1,125	-1,1639	3,88524
1	1,01	0,01	1	-1,0857	-1,125	3,92634
2	1,02	0,01	1,01	-1,0461	-1,0857	3,96468
3	1,03	0,01	1,02	-1,0061	-1,0461	4,00032
4	1,04	0,01	1,03	-0,9658	-1,0061	4,03329
5	1,05	0,01	1,04	-0,9251	-0,9658	4,06365
6	1,06	0,01	1,05	-0,8842	-0,9251	4,09144
7	1,07	0,01	1,06	-0,843	-0,8842	4,11672
8	1,08	0,01	1,07	-0,8016	-0,843	4,13954
9	1,09	0,01	1,08	-0,76	-0,8016	4,15998
10	1,1	0,01	1,09	-0,7183	-0,76	4,17809

Tabel 3. Metode Beda Pusat

i	x	h	$x+h$	$x-h$	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	1,01	0,99	-1,0857366	-1,1639	3,90579
1	1,01	0,01	1,02	1	-1,0460898	-1,125	3,94551
2	1,02	0,01	1,03	1,01	-1,0060866	-1,0857	3,9825
3	1,03	0,01	1,04	1,02	-0,9657537	-1,0461	4,01681
4	1,04	0,01	1,05	1,03	-0,9251172	-1,0061	4,04847
5	1,05	0,01	1,06	1,04	-0,8842029	-0,9658	4,07754
6	1,06	0,01	1,07	1,05	-0,8430357	-0,9251	4,10408
7	1,07	0,01	1,08	1,06	-0,8016403	-0,8842	4,12813
8	1,08	0,01	1,09	1,07	-0,7600405	-0,843	4,14976
9	1,09	0,01	1,1	1,08	-0,7182595	-0,8016	4,16904
10	1,1	0,01	1,11	1,09	-0,6763201	-0,76	4,18602

2. **Persamaan** $(\mathbf{2})$

Metode Beda Maju

Akan dicari nilai $f(x) = f(1)$ dan $f(x+h) = f(1+0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(1) = 12(1^4) \times 7(e^{-4}x1) = 1{,}53851$$

$$f(1+0{,}01) = f(1{,}01) = 12(1{,}01^4) \times 7(e^{-4} \times 1{,}01) = 1{,}538208.$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x+h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{h} = \frac{1{,}538208 - 1{,}538514}{0{,}01} = 0{,}0306.$$

Metode Beda Mundur

Akan dicari nilai dari $f(x) = f(1)$ dan $f(x-h) = f(1-0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(1-0{,}01) = f(0{,}99) = 12 \times (0{,}99^4) \times 7(e^{-4} \times 0{,}99) = 1{,}5382.$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x-h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{1{,}53851 - 1{,}5382}{0{,}01} = 0{,}031.$$

Metode Beda Pusat

Nilai dari $f(x+h) = f(1+0{,}01)$ dan $f(x-h) = f(1-0{,}01)$ disubstitusikan pada rumus metode beda pusat sebagai berikut.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{1{,}538208 - 1{,}5382}{2 * 0{,}01} = 2{,}0510.$$

Secara umum perhitungan turunan numerik dari persamaan (2) di atas dapat diuraikan pada Tabel 4-6 di bawah ini.

Tabel 4. Metode Beda Maju

i	x	h	$x+h$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	1,01	1,53851	1,53821	-0,0306
1	1,01	0,01	1,02	1,53821	1,5373	-0,0909
2	1,02	0,01	1,03	1,5373	1,5358	-0,1499
3	1,03	0,01	1,04	1,5358	1,53373	-0,2076
4	1,04	0,01	1,05	1,53373	1,53109	-0,2639
5	1,05	0,01	1,06	1,53109	1,5279	-0,3189
6	1,06	0,01	1,07	1,5279	1,52417	-0,3725
7	1,07	0,01	1,08	1,52417	1,51992	-0,4247
8	1,08	0,01	1,09	1,51992	1,51517	-0,4755
9	1,09	0,01	1,1	1,51517	1,50992	-0,5249
10	1,1	0,01	1,11	1,50992	1,50419	-0,5728

Tabel 5. Metode Beda Mundur

i	x	h	$x-h$	$f(x)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	0,99	1,53851	1,5382	0,03097
1	1,01	0,01	1	1,53821	1,53851	-0,0306
2	1,02	0,01	1,01	1,5373	1,53821	-0,0909
3	1,03	0,01	1,02	1,5358	1,5373	-0,1499
4	1,04	0,01	1,03	1,53373	1,5358	-0,2076
5	1,05	0,01	1,04	1,53109	1,53373	-0,2639

6	1,06	0,01	1,05	1,5279	1,53109	-0,3189
7	1,07	0,01	1,06	1,52417	1,5279	-0,3725
8	1,08	0,01	1,07	1,51992	1,52417	-0,4247
9	1,09	0,01	1,08	1,51517	1,51992	-0,4755
10	1,1	0,01	1,09	1,50992	1,51517	-0,5249

Tabel 6. Metode Beda Pusat

i	x	h	$x+h$	$x-h$	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	1,01	0,99	1,53821	1,5382	2,05106E-08
1	1,01	0,01	1,02	1	1,5373	1,53851	-6,07082E-06
2	1,02	0,01	1,03	1,01	1,5358	1,53821	-1,20356E-05
3	1,03	0,01	1,04	1,02	1,53373	1,5373	-1,78707E-05
4	1,04	0,01	1,05	1,03	1,53109	1,5358	-2,35732E-05
5	1,05	0,01	1,06	1,04	1,5279	1,53373	-2,91406E-05
6	1,06	0,01	1,07	1,05	1,52417	1,53109	-3,45707E-05
7	1,07	0,01	1,08	1,06	1,51992	1,5279	-3,98614E-05
8	1,08	0,01	1,09	1,07	1,51517	1,52417	-4,50111E-05
9	1,09	0,01	1,1	1,08	1,50992	1,51992	-5,00184E-05
10	1,1	0,01	1,11	1,09	1,50419	1,51517	-5,48822E-05

3. **Persamaan (3)**

Metode Beda Maju

Akan dicari nilai $f(x) = f(1)$ dan $f(x+h) = f(1+0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{6\cos 2x}{x^{3/4} - 5} = \frac{6\cos 2(1)}{1^{3/4} - 5} = 0{,}525659$$

$$f(1{,}01) = \frac{6\cos 2(1{,}01)}{1{,}01^{3/4} - 5} = 0{,}5494.$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x+h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{h} = \frac{0{,}5494 - 0{,}535659}{0{,}01} = 2{,}374124.$$

Metode Beda Mundur

Akan dicari nilai dari $f(x) = f(1)$ dan $f(x-h) = f(1-0{,}01)$ sebagai berikut.

$$f(1-0{,}01) = \frac{6\cos 2x}{x^{3/4} - 5} = \frac{-2{,}38727}{-4{,}7574} = 0{,}5017.$$

Nilai $f(x)$ dan $f(x-h)$ kemudian disubstitusikan pada rumus metode beda maju yaitu sebagai berikut:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{0{,}525659 - 0{,}5017}{0{,}01} = 2{,}3959.$$

Metode Beda Pusat

Nilai dari $f(x+h)=f(1+0{,}01)$ dan $f(x-h)=f(1-0{,}01)$ disubstitusikan pada rumus metode beda pusat sebagai berikut.

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{0{,}5494-0{,}5017}{2\times 0{,}01}=0{,}0236.$$

Secara umum perhitungan turunan numerik dari persamaan (1) di atas dapat diuraikan pada Tabel 7-9 di bawah ini.

Tabel 7. Metode Beda Maju

i	x	h	$x+h$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f'(x)$
0	1	0.01	1.01	0.525659	0.5494	2.374124
1	1.01	0.01	1.02	0.5494	0.573016	2.361544
2	1.02	0.01	1.03	0.573016	0.596498	2.348238
3	1.03	0.01	1.04	0.596498	0.61984	2.33421
4	1.04	0.01	1.05	0.61984	0.643035	2.319467
5	1.05	0.01	1.06	0.643035	0.666075	2.304012
6	1.06	0.01	1.07	0.666075	0.688954	2.287851
7	1.07	0.01	1.08	0.688954	0.711664	2.27099
8	1.08	0.01	1.09	0.711664	0.734198	2.253433
9	1.09	0.01	1.1	0.734198	0.75655	2.235186
10	1.1	0.01	1.11	0.75655	0.778712	2.216255

Tabel 8. Metode Beda Mundur

i	x	h	$x-h$	$f(x)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	0,99	0,62422	0,5957	2,85203
1	1,01	0,01	1	0,65259	0,62422	2,83744
2	1,02	0,01	1,01	0,68081	0,65259	2,82163
3	1,03	0,01	1,02	0,70886	0,68081	2,80463
4	1,04	0,01	1,03	0,73672	0,70886	2,78642
5	1,05	0,01	1,04	0,76439	0,73672	2,76701
6	1,06	0,01	1,05	0,79186	0,76439	2,7464
7	1,07	0,01	1,06	0,8191	0,79186	2,7246
8	1,08	0,01	1,07	0,84612	0,8191	2,70162
9	1,09	0,01	1,08	0,87289	0,84612	2,67745
10	1,1	0,01	1,09	0,89941	0,87289	2,65211

Tabel 9. Metode Beda Pusat

i	x	h	$x+h$	$x-h$	$f(x+h)$	$f(x-h)$	$f'(x)$
0	1	0,01	1,01	0,99	0,5494	0,5018	0,00024
1	1,01	0,01	1,02	1	0,57302	0,52566	0,00024
2	1,02	0,01	1,03	1,01	0,5965	0,5494	0,00024
3	1,03	0,01	1,04	1,02	0,61984	0,57302	0,00023
4	1,04	0,01	1,05	1,03	0,64303	0,5965	0,00023
5	1,05	0,01	1,06	1,04	0,66608	0,61984	0,00023
6	1,06	0,01	1,07	1,05	0,68895	0,64303	0,00023
7	1,07	0,01	1,08	1,06	0,71166	0,66608	0,00023
8	1,08	0,01	1,09	1,07	0,7342	0,68895	0,00023
9	1,09	0,01	1,1	1,08	0,75655	0,71166	0,00022
10	1,1	0,01	1,11	1,09	0,77871	0,7342	0,00022

Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 04, Nomor 02, Halaman 10–22
Juli 2024

Berdasarkan Tabel 1-3, nilai turunan dari persamaan nonlinear polinomial dengan metode beda maju yaitu $4{,}06364$, metode beda mundur yaitu $4{,}03329$, dan metode beda pusat yaitu $4{,}04847$. Pada Tabel 4-6, nilai turunan dari persamaan exponensial dengan metode beda maju yaitu $-0{,}26391$, metode beda mundur yaitu $-0{,}20755$, dan metode beda pusat yaitu $-0{,}0{,}23573$. Pada Tabel 5-9 nilai turunan dari persamaan trigonometri dengan metode beda maju yaitu $2{,}7670059$, metode beda mundur yaitu $2{,}7864163$, dan metode beda pusat yaitu $2{,}7767111$.

***Error* Mutlak**

Nilai *error* mutlak dari metode beda maju, metode beda mundur, dan metode beda pusat diperoleh dengan menggunakan rumus berikut.

$$Eror\ mutlak = |Nilai\ eksak - nilai\ hampiran|$$

Dengan demikian, *error* mutlak dari metode beda maju, metode beda mundur dan metode beda pusat berdasarkan pada data Tabel 1-9 dinyatakan pada Tabel 10-12 berikut ini.

Tabel 10. Nilai *error* Mutlak Persamaan (1)

Jumlah Iterasi	Metode	Nilai eksak	Nilai hampiran	*error* mutlak
10	Beda maju	4,0489	4,06364	0,01475
10	Beda mundur	4,0489	4,03329	0,01561
10	Beda Pusat	4,0489	4,04847	0,00043

Tabel 11. Nilai *error* Mutlak Persamaan (1)

Jumlah Iterasi	Metode	Nilai eksak	Nilai hampiran	*error* mutlak
10	Beda maju	-0,23595	-0,26391	0,02795
10	Beda mundur	-0,23595	-0,20755	0,02840
10	Beda Pusat	-0,23595	-0,23573	0,00022

Tabel 12. Nilai *error* Mutlak Persamaan (3)

Jumlah Iterasi	Metode	Nilai eksak	Nilai hampiran	*error* mutlak
10	Beda maju	2,77964	2,76701	0,01263
10	Beda mundur	2,77964	2,78642	0,00677
10	Beda Pusat	2,77964	2,77671	0,00292

Pembahasan

Berdasarkan pada hasil penelitian yang terdapat pada tabel 10 ditunjukan bahwa metode yang memiliki nilai *error* mutlak terkecil pada persamaan nonlinear bentuk polinomial yaitu metode beda pusat yang memiliki nilai *error* mutlak sebesar

0.00043. Selanjutnya, metode beda maju yaitu sebesar 0.01475, kemudian meetode beda mundur sebesar 0.01561. Berdasarkan pada tabel 11, metode yang memiliki nilai *error* mutlak terkecil pada persamaan nonlinear bentuk eksponensial yaitu metode beda maju yang memiliki nilai *error* mutlak sebesar 0.00022. Selanjutnya, metode beda maju yaitu nilai *error* mutlak sebesar 0.02795, kemudian metode beda mundur memiliki nilai *error* mutlak sebesar 0.02840. Berdasarkan pada tabel 12, metode yang memiliki nilai *error* mutlak terkecil pada persamaan nonlinear bentuk trigonometri yaitu metode beda pusat yang memiliki nilai *error* mutlak sebesar 0.00292. Selanjutnya, metode beda mundur0.00677, kemudian metode beda pusat memiliki nilai *error* mutlak sebesar 0.01263. Dengan demikian, penulis menyimpulkan bahwa metode beda pusat lebih akurat dibandingkan dengan metode beda maju dan metode beda mundur dalam memperkirakan akar persamaan non linear bentuk polinomial, eksponen dan trigonometri. Hal ini selaras dengan hasil riset yang dilakukan oleh (Sitompul & Siahaan, 2022) diperoleh bahwa metode beda hingga memiliki ketepatan dan kestabilan solusi yang baik dalam mendekati solusi eksak. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh (Samaray, 2023) mengatakan bahwa metode selisih pusat cenderung memberikan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan metode selisih maju dan mundur dalam menghitung turunan numerik.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa hal berikut ini:

1. Pada persamaan linear bentuk polinomial nilai yang diperoleh untuk metode beda maju yaitu 4.06364, metode beda mundur yaitu 4.03329, dan metode beda pusat 4.04847.
2. Pada persamaan linear bentuk eksponensial nilai yang diperoleh untuk metode beda maju yaitu -0.26391, metode beda mundur $-0,20755$, dan metode beda pusat $-0,23573$.
3. Pada persamaan linear bentuk trigonometri nilai yang diperoleh untuk metode beda maju yaitu 2.76701, metode beda mundur yaitu 2.78642 dan metode beda pusat yaitu 2.77671.
4. Berdasarkan perhitungan nilai *error* mutlak dari ketiga metode turunan numerik diketahui bahwa metode yang memiliki tingkat keakuratan lebih baik yaitu metode beda pusat karena memiliki nilai *error* mutlak terkecil dibandingkan dengan metode beda maju dan metode beda mundur.

DAFTAR PUSTAKA

Atmika, I. K. A. (2016). Diktat Mata Kuliah Metode Numerik. *Universitas Udayana*, 50–57. https://kupdf.net/download/metode-analisa-numerik-rinaldi-munir_58fabb1cdc0d60af0b959e85_pdf#

Kurnia Sari, D. (2017). Pembuktian Rumus Bentuk Tutup Beda Pusat Berdasarkan Deret Taylor. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(3), 55. https://doi.org/10.25077/jmu.6.3.55-62.2017

Maure, O. P., & Mungkasi, S. (2021). Verifikasi Tingkat Keakuratan Beberapa Metode Integrasi Numerik Fungsi Atas Satu Peubah Bebas. *JURNAL SILOGISME : Kajian Ilmu Matematika Dan Pembelajarannya*, *6*(1), 58. https://doi.org/10.24269/silogisme.v6i1.3540

Munir, R. (2011). Turunan Numerik Definisi Turunan (derivatif). *Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I*, 1–43.

Ningsi, G. P., Nendi, F., & Sugiarti, L. (2020). *An application of the Finite Difference Method for Solving the Mass Spring System Equation Suatu Penerapan Metode Beda Hingga Untuk Menyelesaikan Persamaan Sistem Pegas Massa*. *16*(3), 404–416. https://doi.org/10.20956/jmsk.v

Putra, I. F., Syafwan, M., Helmi, M. R., & Nazra, A. (2023). Bentuk Eksplisit Rumus Beda Maju Dan Beda Mundur Untuk Turunan Ke-N Dengan Orde Ketelitian Ke-N Berdasarkan Deret Taylor. *Jurnal Lebesgue : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika Dan Statistika*, *4*(3), 1675–1686. https://doi.org/10.46306/lb.v4i3.461

Samaray, S. (2023). Perbandingan Metode Diferensiasi Numerik Berbasis Matlab Mobile. *Seminar Nasional Corisindo*, 44–49.

Sitompul, H. A., & Siahaan, E. (2022). Akurasi Solusi Numerik Pada Persamaan Gelombang Berdimensi-Satu. *Jurnal Penelitian Fisikawan*, *5*, 54–63.

Syafwan, H., Syafwan, M., Ramdhan, W., & Yusda, R. A. (2018). Pemrograman Komputasi Rumus Eksplisit Metode Beda Hingga untuk Turunan Pertama dengan Menggunakan Matlab. *Seminar Nasional Royal (SENAR) 2018*, *9986*(September), 61–66.

Syafwan, M. (2018). *PAM 252 Metode Numerik bab 6 pengintegralan numerik*. 1–27.

Yulianto, T., Amalia, R., Matematika, J., Kunci, K., Beda Hingga, M., & Kontinuitas, P. (2016). Penerapan Metode Beda Hingga pada Model Matematika Aliran Banjir dari Persamaan Saint Venant. *Zeta-Math Journal*, *2*(1), 2459–9948. https://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis/article/view/981%0Ahttps://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis/article/download/981/441