

# STRATEGI KONTROL OPTIMAL MODEL *SIQR* PADA PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK

**Lukman Hakim**

*Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknologi dan Desain Institut  
Teknologi dan Bisnis Asia Malang  
email: [bledek.lukman@asia.ac.id](mailto:bledek.lukman@asia.ac.id)*

**Abstrak:** Penelitian ini, melakukan suatu rekonstruksi model matematika penyebaran penyakit campak dengan melibatkan variabel kontrol. Proses kontrol yang diterapkan pada model dengan memberikan pandangan bahwa kontak langsung antara populasi rentan dan terinfeksi harus dikendalikan untuk mencegah terjadinya endemi. Dimana, pengontrolan ini bertujuan untuk meminimumkan jumlah sub populasi terinfeksi penyakit campak. Selanjutnya, langkah yang dilakukan dengan menerapkan analisis teori kontrol optimal dan simulasi numerik dengan software Matlab. Berdasarkan simulasi numerik yang telah dilakukan menunjukkan bahwa strategi pengontrolan penyebaran penyakit campak terlihat efektif sebagai tindakan dalam menekan pertumbuhan populasi terinfeksi.

**Kata Kunci:** Model Matematika, Penyakit Campak, Kontrol Optimal, Minimum Pontryagin.

**Abstract:** *This study reconstructed a mathematical model of the spread of measles by involving control variables. The control process applied to the model provides that the direct contact between susceptible and infected populations must be controlled to prevent the endemic. This control aims to minimize the number of subpopulations infected. Furthermore, the steps are carried out by applying optimal control theory analysis and numerical simulation with Matlab software. Based on the simulations, bring out the strategy of controlling the measles is effective as well as an action in decreasing the growth of the infected population.*

**Keywords:** *Mathematical Model, Measles Disease, Optimal Control, Minimum Pontryagin.*

## PENDAHULUAN

**M**easles atau campak merupakan bagian dari penyakit yang mudah menular (Edward et al., 2015). Penyebaran campak disebabkan oleh virus dari golongan *Paramyxovirus* yang dapat menyebabkan flu, batuk, demam, dan munculnya bintik-bintik pada kulit (Suandi, 2017). Pada umumnya penularannya sangat mudah, yaitu melalui droplet dari penderita penyakit campak (Fatmawati et al., 2020). Karena tergolong penyakit mudah menular, maka penyakit campak menjadi salah satu perhatian utama, untuk dilakukan pengendalian agar tidak terjadi pandemi. Kajian tentang pengendalian penyakit campak dengan melibatkan proses vaksinasi dalam bentuk analisis model matematika (Tessa, 2006). Oleh karena itu, pemodelan matematika menjadi salah satu metode penting yang dapat diterapkan dalam merepresentasikan suatu kejadian atau fenomena yang ada disekitar kita (Hakim & Habibi, 2019; Hakim & Kusumastuti, 2012), termasuk di dalamnya tentang fenomena penyebaran suatu pandemi penyakit (Ayu & Aulia, 2021).

Pembahasan tentang penyebaran penyakit campak dengan mempertimbangkan adanya laju transmisi infeksi antar subpopulasi, dalam transmisi berbentuk fungsi periodik (Huang et al., 2018). Selanjutnya, model kompartemen tipe SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovery*) digunakan sebagai alat pendekatan dalam menggambarkan dinamika kestabilan penyakit campak, dan proses penyebarannya (Sihotang et al., 2019), sedangkan Viriyapong dan Ridbmroong, memaparkan dinamika penyebaran penyakit campak dengan mempertimbangkan adanya proses vaksinasi dan treatment (Viriyapong & Ridbamroong, 2020). Sebagai tambahan, kajian tentang perilaku dinamika penyebaran penyakit campak ditunjukkan dengan analisis model kompartemen tipe SIQR (*Susceptible, Infected, Quarantine, Recovery*), dimana *Susceptible* merepresentasikan populasi yang rentan terinfeksi campak, *Infected* sebagai populasi yang telah terinfeksi penyakit campak, *Quarantine* merupakan bagian populasi yang dikarantina, dan *Recovery* menggambarkan populasi yang telah sembuh dari penyakit campak (Fatmawati et al., 2020).

Secara umum pendekatan dengan model matematika yang telah dikaji, bertujuan untuk mengendalikan terjadinya pandemi penyakit campak. Akan tetapi, pengendalian yang dilakukan hanya sebatas pada analisis dinamika atau perilaku solusi model matematika, belum melibatkan konsep kontrol optimal. Masalah kontrol optimal, sebenarnya sudah menjadi salah satu bagian penting dalam analisis pencegahan dan pengendalian suatu penyakit. Misalnya, masalah kontrol optimal telah diterapkan dalam proses pengendalian penyakit kolera dengan adanya vaksinasi (Hakim et al., 2015). Selain itu, kontrol optimal menjadi salah satu strategi dalam pengendalian penyebaran penyakit HIV (Marsudi et al., 2017). Sebagai tambahan kajian, bahwa kontrol optimal digunakan sebagai alat untuk menggambarkan dinamika

solusi penanganan penyebaran penyakit kanker serviks (Kristanti et al., 2020). Selanjutnya, sebagai penguat akan pentingnya masalah kontrol optimal, penelitian dan analisis kontrol optimal diimplementasikan dalam pencegahan tumor, dengan variabel kontrolnya berupa proses imunoterapi dan kemoterapi (Trisilowati, 2021). Oleh karena itu, Fatmawati dkk melakukan perluasan model yang telah dikaji dengan penambahan variabel kontrol sebagai usaha penanganan penyakit campak.

Penelitian ini terbagi atas beberapa bagian pokok bahasan, yaitu pendahuluan, metode penelitian, dan dilanjutkan dengan pembahasan hasil penelitian. Sebagai pelengkap diberikan suatu kesimpulan dari penelitian tentang pengendalian penyakit campak dengan analisis kontrol optimal.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini mengusung model penyebaran penyakit campak yang telah dikaji oleh Fatmawati, dkk (2020). Pada penelitian ini, keseluruhan populasi terbagi atas empat bagian subpopulasi, yaitu subpopulasi yang rentan terkena penyakit campak (*Susceptible*), subpopulasi terinfeksi penyakit campak (*Infected*), subpopulasi yang dikarantina (*Quarantine*), dan subpopulasi yang dinyatakan sembuh dari penyakit campak (*recovery*). Selanjutnya, berdasarkan model yang telah diteliti oleh Fatmawati dkk ditambahkan suatu variabel kontrol sebagai salah satu kegiatan pengendalian penyakit campak. Secara eksplisit, telah dijelaskan pada bagian pendahuluan bahwa penularan penyakit campak dapat terjadi, karena adanya peluang terjadinya kontak langsung antara individu sehat dengan individu yang telah terpapar penyakit campak. Sehingga, kontak langsung menjadi bagian penting yang harus diperhatikan dalam pengendalian terjadinya pandemi. Usaha pencegahan atau pengurangan kontak langsung dapat dilakukan dengan memberikan pemahaman, penuluhan, dan edukasi tentang bahayanya kontak langsung dengan penderita penyakit campak. Harapannya, dengan proses edukasi tersebut dapat meningkatkan kesadaran diri terhadap pentingnya tidak kontak langsung dengan individu yang terinfeksi.

Selanjutnya, usaha pencegahan, pengurangan kontak dan kegiatan edukasi dinotasikan dengan variabel  $u(x)$ , sebagai variabel kontrol. Variabel ini ditambahkan pada sistem persamaan diferensial yang dikaji oleh Fatmawati dkk (2020). Adapun proses implementasi masalah kontrol optimal dapat diuraikan pada langkah-langkah berikut:

1. Melakukan rekontruksi model penyakit campak dengan menambahkan variabel  $u(t)$  sebagai variabel kontrol.
2. Mendefinisikan fungsi tujuan (*objective*) yang berguna dalam meminimumkan jumlah populasi yang terinfeksi penyakit campak.

3. Menerapkan prinsip minimum pontryagin sebagai langkah mendapatkan solusi dari sistem kontrol optimal.
4. Menentukan komponen-komponen utama dalam kontrol optimal, yaitu kondisi stasioner, persamaan state, dan persamaan costate.
5. Mengimplementasikan simulasi numerik sebagai penggambaran solusi dari kontrol optimal dengan *software* Matlab.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Formulasi Model Masalah Kontrol Optimal

Berdasarkan kondisi spesifikasi penyakit campak yang dapat menular melalui *droplet* individu terinfeksi dengan individu sehat dan atau rentan Hal ini dapat memberikan suatu implikasi bahwa peluang adanya kontak langsung antara individu terinfeksi dengan individu sehat. Oleh karena itu, perlunya melakukan usaha pengontrolan untuk mencegah terjadinya pandemi penyakit campak. Berdasarkan upaya pencegahan yang telah dijelaskan pada bagian metode penelitian, maka variabel kontrol  $u(t)$  dapat diimplementasikan pada model yang telah diteliti oleh Fatmawati dkk dan didapatkan perluasan model matematika dengan variabel kontrol sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1 - p)\Lambda + \delta_1 S(t) - \alpha(1 - u(t))S(t)I(t) - (\mu + \delta_2)S(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha(1 - u(t))S(t)I(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \beta I(t) - (\gamma + \varphi + \mu)Q(t) \quad (3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \eta I(t) + \gamma Q(t) - (\mu + \delta_2)R(t) + p\Lambda \quad (4)$$

Selanjutnya sebagai pemahaman terkait model, maka diskripsi terkait variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

**Tabel 1.** Keterangan Variabel dan Parameter Pada Model (1) - (4)

Variabel dan Parameter	Keterangan
$S(t)$	Kelas populasi rentan terjangkit penyakit campak
$I(t)$	Kelas populasi yang telah terinfeksi penyakit campak
$Q(t)$	Kelas populasi yang dikarantika
$R(t)$	Kelas populasi yang dinyatakan sembuh
$\Lambda$	Laju kelahiran alami

$\delta_1$	Laju imigrasi
$\alpha$	Peluang laju perubahan populasi rentan menjadi populasi terinfeksi
$\mu$	Laju kematian alami
$\delta_2$	Laju emigrasi
$\eta$	Peluang laju kesembuhan pada populasi terinfeksi
$\beta$	Peluang laju perubahan populasi terinfeksi menjadi populasi karantina
$\varphi$	Laju kematian karena penyakit campak
$\gamma$	Peluang laju kesembuhan pada populasi karantina
$p$	Proporsi imunisasi
$u(t)$	Variabel kontrol optimal (Usaha pengendalian)

**Masalah Kontrol Optimal**

Implementasi kontrol optimal dalam pemodelan matematika, berharap akan didapatkan suatu kondisi nilai terbaik dalam proses pengontrolan. Berdasarkan model (1) – (4) yang telah dijelaskan pada bagian formulasi model kontrol optimal, maka masalah kontrol optimal pada penelitian ini bertujuan untuk meminimumkan fungsi objektif berikut:

$$J(u(t)) = \int_0^T (I(t) + Cu^2(t))dt, \quad (5)$$

dimana nilai bobot positif  $C$  menjadi salah satu komponen dalam menentukan nilai kontrol optimal  $u^*(t)$ , yang berakibat pada fungsi objektif sebagai berikut:

$$J(u^*(t)) = \min \{J(u(t)) | u(t) \in U\},$$

dimana domain  $U = \{u(t) : 0 \leq u(t) \leq 1\}$ . Selanjutnya, penerapan kontrol optimal ini bertujuan untuk meminimumkan populasi yang terinfeksi, sehingga akan meningkatkan populasi yang sehat. Berdasarkan pada prinsip minimum Pontryagin (Rodrigues et al., 2014), maka didapatkan kondisi optimal dari model penyakit campak, dengan langkah membangun fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan sistem persamaan (1) – (4) dan persamaan (5), yaitu:

$$\begin{aligned}
H = & I(t) + Cu^2(t) \\
& + \lambda_S \left( (1-p)\Lambda + \delta_1 S(t) - \alpha(1-u(t))S(t)I(t) \right. \\
& \left. - (\mu + \delta_2)S(t) \right) \\
& + \lambda_I \left( \alpha(1-u(t))S(t)I(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)I(t) \right) \\
& + \lambda_Q \left( \beta I(t) - (\gamma + \varphi + \mu)Q(t) \right) \\
& + \lambda_R \left( \eta I(t) + \gamma Q(t) - (\mu + \delta_2)R(t) + p\Lambda \right),
\end{aligned} \quad (6)$$

dimana  $\lambda_S$ ,  $\lambda_I$ ,  $\lambda_Q$ , dan  $\lambda_R$  merupakan variabel-variabel *costate* pada masalah kontrol optimal.

Mengacu pada konsep minimum Pontryagin, fungsi Hamiltonian pada kontrol optimal akan menuju solusi yang optimal jika memenuhi tiga keadaan atau kondisi berikut (Rodrigues et al., 2014):

### 1. Kondisi Stasioner (*Stationary Condition*)

Masalah keadaan stasioner pada kontrol optimal merupakan suatu keadaan dimana kontrol optimal  $u(t)$  dapat meminimumkan fungsi Hamiltonian pada setiap selang waktu. Kondisi stasioner diperoleh dengan melakukan proses diferensial pada fungsi Hamiltonian (6) terhadap variabel kontrol  $u(t)$ , sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u(t)} &= 0 \Leftrightarrow 2Cu(t) + \lambda_S \alpha S(t)I(t) - \lambda_I \alpha S(t)I(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2Cu(t) = \lambda_I \alpha S(t)I(t) - \lambda_S \alpha S(t)I(t) \\ &\Leftrightarrow u(t) = \frac{\alpha S(t)I(t)(\lambda_I - \lambda_S)}{2C},\end{aligned}$$

dikarenakan variabel  $u(t)$  suatu nilai proporsi, maka dapat didefinisikan rentang nilai variabel kontrol  $0 \leq u(t) \leq 1$ , dan berakibat pada nilai solusi  $u^*(t)$  adalah:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & u(t) \leq 0 \\ u(t), & 0 < u(t) < 1 \\ 1, & u(t) \geq 1. \end{cases}$$

Oleh karena rentang nilai solusi  $u^*(t)$  diantara 0 dan 1, maka nilai kontrol optimal  $u^*(t)$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left( 0, \frac{\alpha S(t)I(t)(\lambda_I - \lambda_S)}{2C} \right), 1 \right\}. \quad (7)$$

### 2. Kondisi *State*

Kondisi *state* merupakan suatu sistem persamaan yang dapat dijadikan sebagai kendala dalam masalah kontrol optimal, yaitu:

$$\frac{dH}{d\lambda_S} = \frac{dS(t)}{dt} = (1-p)\Lambda + \delta_1 S(t) - \alpha(1-u(t))S(t)I(t) - (\mu + \delta_2)S(t) \quad (8)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_I} = \frac{dI(t)}{dt} = \alpha(1-u(t))S(t)I(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)I(t) \quad (9)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_Q} = \frac{dQ(t)}{dt} = \beta I(t) - (\gamma + \varphi + \mu)Q(t) \quad (10)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_R} = \frac{dR(t)}{dt} = \eta I(t) + \gamma Q(t) - (\mu + \delta_2)R(t) + p\Lambda \quad (11)$$

dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ ,  $Q(0) = Q_0$ , dan  $R(0) = R_0$ .

### 3. Kondisi *Adjoint* atau *Costate*

Kondisi adjoint sistem dapat diperoleh dari nilai negatif dari fungsi Hamiltonian (6) yang diturunkan terhadap variabel-variabel statenya, yaitu:

$$\frac{d\lambda_S}{dt} = -\frac{dH}{dS(t)} = -\lambda_S(\delta_1 - \alpha(1-u)I(t) - (\mu + \delta_2)) - \lambda_I(\alpha(1-u)I(t)) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_I}{dt} = -\frac{dH}{dI(t)} = & -1 + \lambda_S\alpha(1-u)S(t) \\ & - \lambda_I(\alpha(1-u)S(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)) - \lambda_Q\beta \\ & - \lambda_R\eta \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\lambda_Q}{dt} = -\frac{dH}{dQ(t)} = \lambda_Q(\gamma + \varphi + \mu) - \lambda_R\gamma \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda_R}{dt} = -\frac{dH}{dR(t)} = \lambda_R(\mu + \delta_2) \quad (15)$$

dengan kondisi transversal berikut  $\lambda_S(T) = \lambda_I(T) = \lambda_Q(T) = \lambda_R(T) = 0$ .

Selanjutnya, dengan melakukan substitusi nilai kontrol optimal  $u^*$  pada kondisi *state* (8) – (11) dan kondisi *costate* (12) – (15), maka diperoleh sistem kondisi optimal sebagai berikut:

$$\frac{dH}{d\lambda_S^*} = \frac{dS^*(t)}{dt} = (1-p)\Lambda + \delta_1 S^*(t) - \alpha(1-u)S^*(t)I^*(t) - (\mu + \delta_2)S^*(t) \quad (16)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_I^*} = \frac{dI^*(t)}{dt} = \alpha(1-u)S^*(t)I^*(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)I^*(t) \quad (17)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_Q^*} = \frac{dQ^*(t)}{dt} = \beta I^*(t) - (\gamma + \varphi + \mu)Q^*(t) \quad (18)$$

$$\frac{dH}{d\lambda_R^*} = \frac{dR^*(t)}{dt} = \eta I^*(t) + \gamma Q^*(t) - (\mu + \delta_2)R^*(t) + p\Lambda \quad (19)$$

$$\frac{d\lambda_S^*}{dt} = -\frac{dH}{dS^*(t)} = -\lambda_S^*(\delta_1 - \alpha(1-u)I^*(t) - (\mu + \delta_2)) - \lambda_I^*(\alpha(1-u)I^*(t)) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_I^*}{dt} = -\frac{dH}{dI^*(t)} = & -1 + \lambda_S^*\alpha(1-u)S^*(t) \\ & - \lambda_I^*(\alpha(1-u)S^*(t) - (\eta + \beta + \varphi + \mu + \delta_2)) - \lambda_Q^*\beta - \lambda_R^*\eta \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{d\lambda_Q^*}{dt} = -\frac{dH}{dQ^*(t)} = \lambda_Q^*(\gamma + \varphi + \mu) - \lambda_R^*\gamma \quad (22)$$

$$\frac{d\lambda_R^*}{dt} = -\frac{dH}{dR^*(t)} = \lambda_R^*(\mu + \delta_2) \quad (23)$$

dengan kondisi batas sebagai berikut  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ ,  $Q(0) = Q_0$ ,  $R(0) = R_0$ ,  $\lambda_S(T) = \lambda_I(T) = \lambda_Q(T) = \lambda_R(T) = 0$ .

### Simulasi Numerik

Bagian ini memaparkan tentang simulasi numerik dari model matematika penyakit, dan simulasi ini sebagai penguat dalam menunjukkan hasil analisis modelnya. Simulasi numerik ini dengan bantuan *software* Matlab dan menggunakan metode Runge-Kutta. Selanjutnya, dalam mempermudah ilustrasi dari perilaku solusi dari model penyakit campak, maka pada simulasi ini akan diberikan dua pemaparan tentang simulasi model tanpa adanya kontrol dan simulasi dengan mempertimbangkan keefektifan dari proses kontrol optimal.

#### 1. Simulasi I dan II

Simulasi I mengacu pada persamaan (1) – (4), dengan menerapkan nilai awal pada subpopulasi  $(S_0, I_0, Q_0, R_0) = (0,8; 0,2; 0,1; 0)$ . Selanjutnya, untuk menggambarkan perilaku solusi penyebaran penyakit campak secara numerik menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 2 berikut:

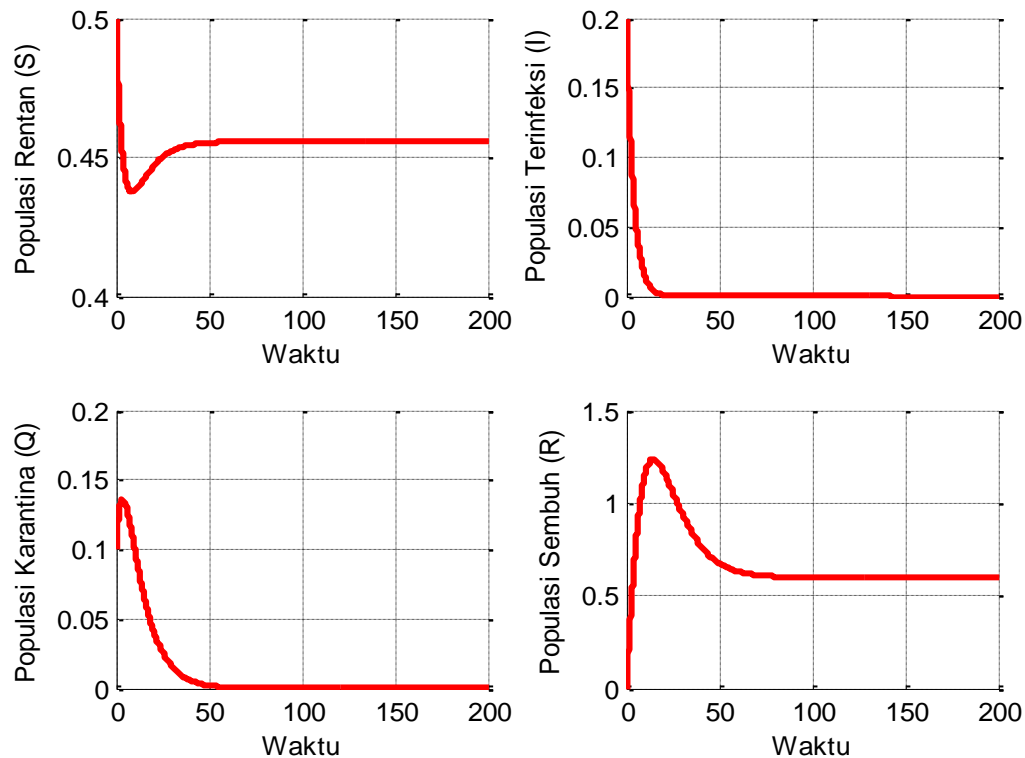
**Tabel 2.** Nilai Parameter Simulasi I

Parameter	Nilai	Referensi
$\Lambda$	0,05	Asumsi
$\delta_1$	0,01	Asumsi
$\alpha$	0,2	(Suandi, 2018)
$\mu$	0,00875	(Viriyapong & Ridbamroong, 2020)
$\delta_2$	0,1	Asumsi
$\eta$	0,04	(Fatmawati et al., 2020)
$\beta$	0,17	(Fatmawati et al., 2020)
$\varphi$	0,03	(Viriyapong & Ridbamroong, 2020)
$\gamma$	0,06	(Fatmawati et al., 2020)
$p$	0,1	(Sihotang et al., 2019)

Kemudian dengan mengimplementasikan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar untuk model penyakit campak sebesar  $R_0 = \frac{\alpha(\delta_1 + \Lambda - p\Lambda)}{(\delta_2 + \mu)(\beta + \delta_2 + e\eta + \mu + \varphi)} = 0,2900 < 1$ . Hal ini, memberikan petunjuk bahwa tidak terjadinya endemik penyakit campak. Oleh karena itu, perilaku solusi penyakit campak dengan bilangan reproduksi kurang dari satu, dapat dilihat pada Gambar 1. Selanjutnya, mengacu pada Gambar 1 menunjukkan bahwa dengan berjalannya waktu, populasi terinfeksi terlihat menurun dan menuju nol. Artinya, tidak terdapat populasi yang terjangkit penyakit campak, dan kasus ini simulasi memberikan



petunjuk tentang endemi penyakit campak tidak perlu dikhawatirkan, dan tidak diperlukan suatu usaha pengendalian penyakit.



**Gambar 1.** Perilaku Solusi Numerik Penyakit Campak dengan  $R_0 < 0$

Berbeda halnya, jika dalam proses simulasi selanjutnya dilakukan suatu variasi nilai parameter, seperti yang terlihat pada Tabel 3 berikut:

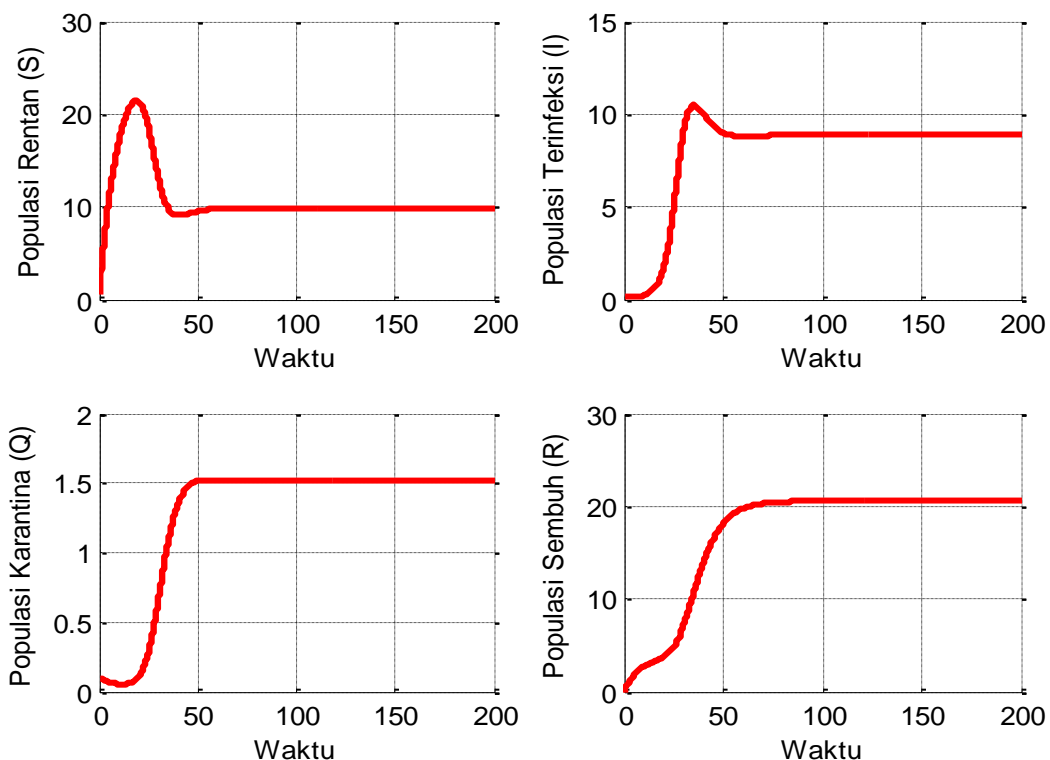
**Tabel 3.** Nilai Parameter Simulasi II

Parameter	Nilai	Referensi
$\Lambda$	3	(Fatmawati et al., 2020)
$\delta_1$	0,01	Asumsi
$\alpha$	0,02	Asumsi
$\mu$	0,00875	(Viriyapong & Ridbamroong, 2020)
$\delta_2$	0,1	Asumsi
$\eta$	0,04	(Fatmawati et al., 2020)
$\beta$	0,017	Asumsi
$\varphi$	0,03	(Viriyapong & Ridbamroong, 2020)
$\gamma$	0,06	(Fatmawati et al., 2020)

$p$	0,1	(Sihotang et al., 2019)
-----	-----	-------------------------

Selanjutnya, dengan melakukan substitusi nilai parameter pada Tabel 3 terhadap  $R_0$ , maka besar bilangan reproduksi dasar  $R_0 = \frac{\alpha(\delta_1 + \Lambda - p\Lambda)}{(\delta_2 + \mu)(\beta + \delta_2 + e\eta + \mu + \varphi)} = 2,5461 > 1$ .

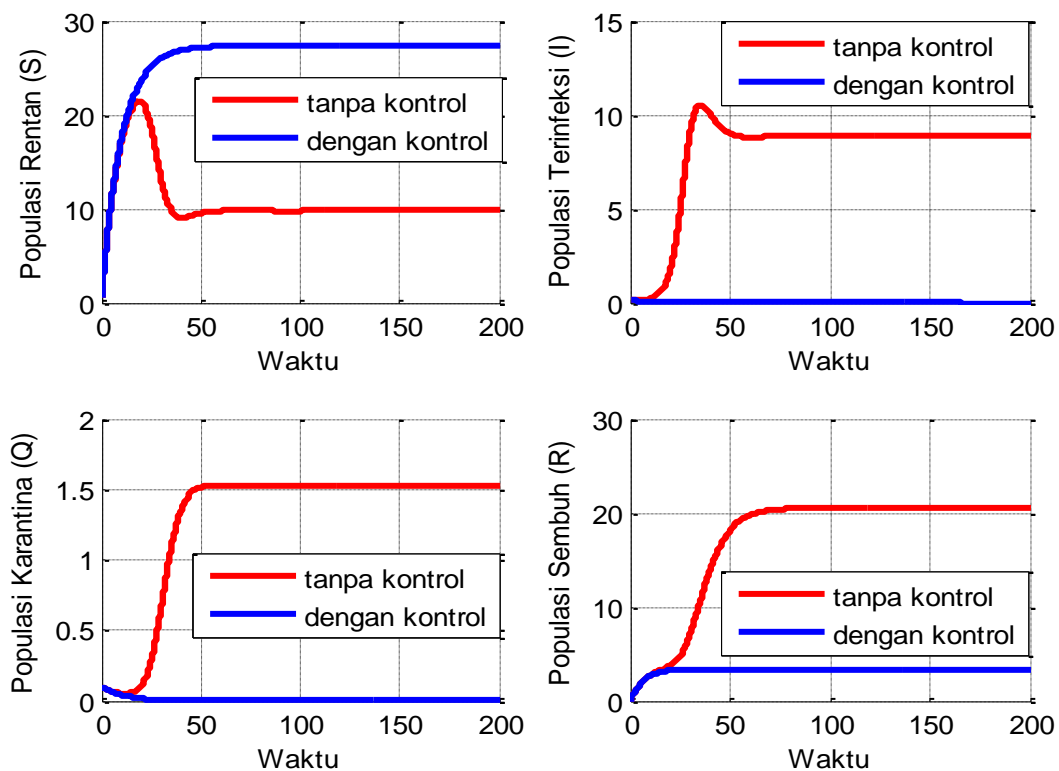
Berdasarkan teori bilangan reproduksi dasar, bahwa jika nilai  $R_0 > 1$  menunjukkan penyebaran penyakit sedang berlangsung dan mengakibatkan endemi (Edward et al., 2015). Gambar 2 menunjukkan bahwa populasi rentan yang awalnya meningkat kemudian mengalami penurunan karena sudah masuk dalam kelas terinfeksi. Dengan demikian, pada simulasi yang telah dilakukan memberikan petunjuk bahwa populasi terinfeksi akan mengalami peningkatan. Simulasi numerik menggambarkan kelas terinfeksi naik signifikan di awal waktu, kemudian peningkatannya bersifat standar layaknya garis horizontal dan tidak mengalami penurunan hingga di akhir waktu simulasi. Oleh karena itu, perlunya ada suatu upaya untuk mengendalikan penyakit yang sedang mewabah. Pada penelitian ini, dilakukancskenario pengendalian dengan menerapkan masalah kontrol optimal untuk mencegah terjadinya pandemi.



**Gambar 2.** Perilaku Solusi Numerik Penyakit Campak dengan  $R_0 > 0$

## 2. Simulasi III

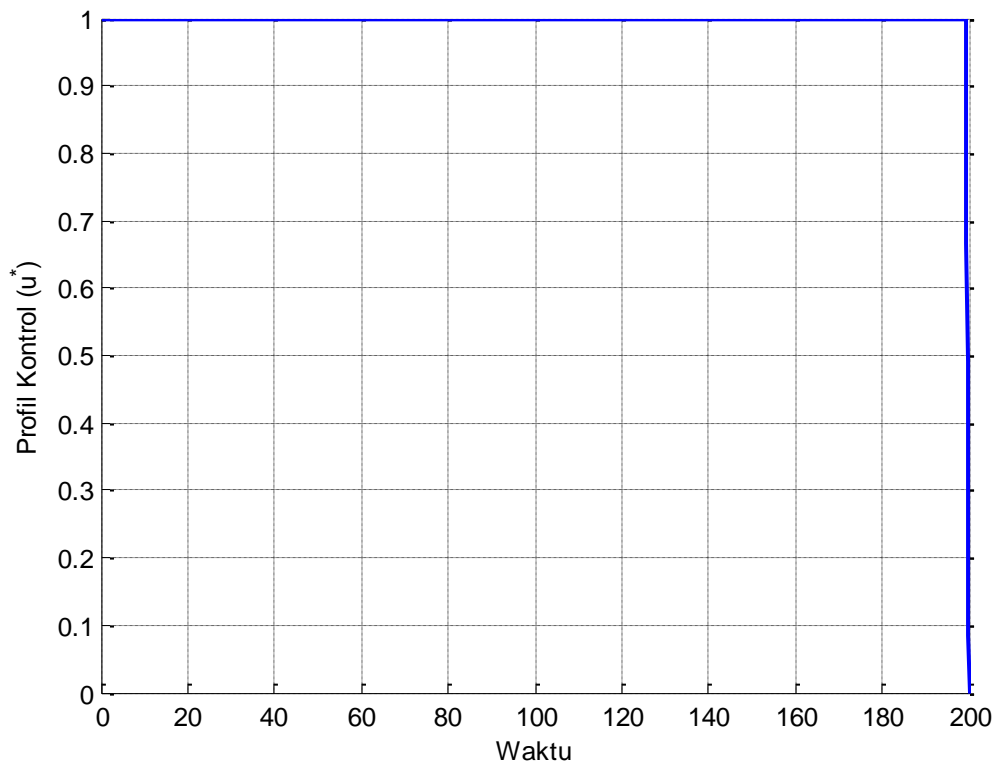
Simulasi ketiga melakukan skenario yang dilakukan dalam mengatasi epidemi penyakit campak, maka langkah yang dapat dilakukan yaitu mengurangi interaksi atau kontak langsung antar subpopulasi *susceptible* dan subpopulasi *infected*. Mengingat bahwa proses penularan penyakit campak melalui *droplet* dari penderita penyakit campak. Merujuk pada fungsi objektif (5), dan penggunaan besar bobot yang digunakan dalam simulasi kontrol optimal, yaitu  $C = 0,01$ . Kemudian dilakukan simulasi dengan melibatkan nilai parameter Tabel 3, variabel kontrol, dan bobotnya terhadap sistem persamaan (16) – (23), maka diperoleh hasil simulasi numerik penyakit campak dengan variabel kontrol pada Gambar 3 berikut:



**Gambar 3.** Simulasi Numerik Kontrol Optimal Penyakit Campak

Gambar 3 memberikan simulasi tentang adanya efektifitas dari kontrol optimal sebagai usaha penanganan adanya endemi penyakit campak. Bahwa terlihat, subpopulasi rentan tanpa adanya kontrol mengalami penurunan signifikan sekitar waktu ke-20 hingga akhir waktu simulasi. Akan tetapi, berbeda jauh setelah diterapkan masalah kontrol optimal, populasi rentan terlihat meningkat terus dari awal waktu simulasi hingga akhir simulasi. Selanjutnya, untuk menyakinkan

kembali akan efektivitas dari konyrol, simulasi numerik menggambarkan secara jelas bahwa populasi terinfeksi tanpa kontrol ditunjukkan oleh kurva warna merah, yang meningkat signifikan dari awal waktu. Sehingga pandemi sedang terjadi secara meluas, dan setelah diberlakukan kontrol, hasil simulasi ditunjukkan oleh kurva biru. Dimana kontrol optimal mampu menekan secara signifikan jumlah populasi yang terinfeksi mulai awal waktu simulasi hingga akhir waktu ke-200. Artinya, kondisi ini menunjukkan akan efektivitas kontrol dalam mengurangi jumlah kelas terinfeksi. Sedangkan kelas karantina dan kelas sembuh terlihat memiliki perilaku solusi yang hamper serupa, dimana sebelum dilakukan pengontrolan populasinya naik terus sampai akhir waktu, kemudian terlihat menurun setelah dilakukan proses pengontrolan. Bagian akhir simulasi menunjukkan tentang tentang profil dari perjalanan variabel kontrol  $u^*(t)$  yang mampu menekan adanya penyebaran penyakit campak, dan dalam hal ini kurva variabel kontrol warna biru disajikan pada Gambar 4 berikut:



**Gambar 4.** Profil Variabel Kontrol  $u^*(t)$

## **SIMPULAN**

Penelitian ini membahas tentang penerapan masalah kontrol optimal sebagai usaha dalam mengendalikan penyebaran penyakit campak, dengan melibatkan satu kegiatan kontrol berupa pengurangan interaksi langsung antara subpopulasi rentan dan subpopulasi terinfeksi. Dimana, usaha pengurangan kontak langsung dapat dilakukan dengan kegiatan pendampingan dan edukasi tentang bahayanya melakukan kontak langsung dengan penderita campak. Selanjutnya, simulasi dari model yang telah dilakukan, memperlihatkan adanya pengaruh variabel kontrol yang signifikan dalam mengurangi jumlah subpopulasi terinfeksi. Hal ini, sejalan dan sesuai dengan fungsi tujuan (*objective*) yang telah ditentukan, yaitu meminimumkan jumlah populasi yang terinfeksi.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Ayu, R. W. S., & Aulia, H. H. (2021). Kontrol Adaptif Pada Model Penyebaran Kolera Dengan Adanya Ketidakpastian Parameter. *Math Educa Journal*, 5(2), 154–162. <https://doi.org/10.15548/mej.v5i2.2546>
- Edward, S., Raymond, K. E., Gabriel, K. T., Nestory, F., Godfrey, M. G., & Arbogast, M. P. (2015). A Mathematical Model for Control and Elimination of the Transmission Dynamics of Measles. *Applied and Computational Mathematics*, 4(6), 396–408. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20150406.12>
- Fatmawati, A., Aju, L. R., & Malango, R. (2020). Model Dinamika Penyebaran Penyakit Campak Dengan Pengaruh Migrasi dan Penambahan Imunisasi. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, 8(1), 9–15.
- Hakim, L., & Habibi, A. R. (2019). Dynamic Behavior of Predator-Prey With Ratio Dependent, Refuge in Prey and Harvest From Predator. *ZERO: Jurnal Sains, Matematika Dan Terapan*, 3(1), 23–32. <https://doi.org/10.30829/zero.v3i1.5886>
- Hakim, L., & Kusumastuti, A. (2012). Generalisasi Fungsi Airy Sebagai Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Nonlinier. *Cauchy*, 2(2), 86–95. <https://doi.org/10.18860/ca.v2i2.2223>
- Hakim, L., Trisilowati, T., & Darti, I. (2015). Optimal Control of a Cholera Disease Model with Vaccination. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 53(4), 65–72. <https://doi.org/10.1063/1.3637839>
- Huang, J., Ruan, S., Wu, X., & Zhou, X. (2018). Seasonal Transmission Dynamics of Measles in China. *Theory in Biosciences*, 137(2), 185–195. <https://doi.org/10.1007/s12064-018-0271-8>
- Kristanti, K. T., Trisilowati, T., & Widodo, A. (2020). Optimal Control of Cervical Cancer Model with Vaccination and Screening. *The Journal of Experimental Life Sciences*, 10(2), 72–78. <https://doi.org/10.21776/ub.jels.2020.010.02.01>

- Marsudi, M., Hidayat, N., & Wibowo, R. B. E. (2017). Application of Optimal Control Strategies for the Spread of HIV in a Population. *Research Journal of Life Science*, 4(1), 1–9. <https://doi.org/10.21776/ub.rjls.2017.004.01.1>
- Rodrigues, H. S., Monteiro, M. T. T., & Torres, D. F. M. (2014). Optimal Control and Numerical Software: An Overview. *Systems Theory: Perspectives, Applications and Developments*, January, 93–110.
- Sihotang, W. D., Simbolon, C. C., Hartiny, J., Tindaon, D., & Sinaga, L. P. (2019). Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Imunisasi dan Vaksin MR. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 16(1), 107–113. <https://doi.org/10.20956/jmsk.v16i1.6594>
- Suandi, D. (2017). Analisis Dinamik Pada Model Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Vaksin Permanen. *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, 2(2), 1–10. <https://doi.org/10.15575/kubik.v2i2.1854>
- Suandi, D. (2018). Optimal Control Problem of Vaccination for The Spread of Measles Diseases Model. *Jurnal Riset Dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 2(2), 76–83. <https://doi.org/10.26740/jram.v2n2.p76-83>
- Tessa, O. M. (2006). Mathematical Model for Control of Measles by Vaccination. *Mali Symposium on Applied Sciences*, August 2006, 31–36.
- Trisilowati, T. (2021). Optimal Control of Tumor – Immune System Interaction with Treatment. *Annual Basic Science International Conference*, 070018(October 2018).
- Viriyaopong, R., & Ridbamroong, W. (2020). Global Stability Analysis and Optimal Control of Measles Model with Vaccination and Treatment. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 62(1–2), 207–237. <https://doi.org/10.1007/s12190-019-01282-x>