Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 1, Nomor 2, Halaman 1–11
Juli 2021
e-ISSN: 2775-2356

PEMODELAN SISTEM ANTRIAN PASIEN RAWAT JALAN MENGGUNAKAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS: STUDI KASUS RSU DI YOGYAKARTA

Osniman Paulina Maure[1,*], Gabariela Purnama Ningsi[2], Florianus Aloysius Nay[3]

[1,3]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas San Pedro
[2]Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Katolik Indonesia Santu Paulus Ruteng
[*]email: osnimanpaulinamaure@gmail.com

Abstrak: Sistem antrian sering ditemukan pada suatu pelayanan fasilitas publik diantaranya sistem pelayanan suatu RSU di Yogyakarta. Antrian ini disebabkan karena jumlah pasien yang membutuhkan pelayanan lebih banyak dari pada petugas dan fasilitas layanan yang tersedia di rumah sakit tersebut. Tujuan penelitian ini adalah memodelkan sistem antrian pada suatu RSU di Yogyakarta dengan menggunakan aljabar max-plus. Sistem antrian yang dianalisis pada penelitian ini dikhususkan pada sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS. Metode penelitian pada penelitian ini adalah studi literatur dan teknik pengumpulan data adalah wawancara dan observasi. Observasi dilakukan pada saat kedatangan pasien di rumah sakit sampai pasien pulang. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa Petri net dapat digunakan untuk menggambarkan diagram alur sistem antrian pada suatu RSU di Yogyakarta, sedangkan aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan berdasarkan diagram alur yang telah diperoleh penulis. Pemodelan ini menghasilkan matriks dari suatu keadaan tertentu.

Kata Kunci: *Sistem Antrian, Pelayanan Rumah Sakit, Petri Net, Aljabar Max-Plus*

Abstract: *Queuing systems are often found in public service facilities, including the service system of an RSU in Yogyakarta. This queue is caused by the number of patients who need more services than service officers and facilities available at the house. The purpose of this study is to model the queuing system at an RSU in Yogyakarta using max-plus algebra. The queuing system analyzed in this patient study was in the outpatient service queuing system using BPJS. The research method in this study is literature study and data collection techniques are interviews and observation. Observations were made when the patient arrived at the hospital until the patient went home. The results of this study indicate that Petri net can be used to describe the flow chart of the queuing system at an RSU in Yogyakarta, while max-plus algebra can be used to model the queuing system for outpatient services based on the flowchart that has been obtained by the author. This modeling produces a matrix of a certain state.*

Keywords: *Queuing System, Hospital Services, Petri Net, Algebra Max-Plus*

PENDAHULUAN

Antrian merupakan suatu keadaan dimana jumlah pihak yang memerlukan pelayanan lebih banyak dibandingkan dengan jasa yang melayani pelayanan tersebut (Maure & Ruditho, 2019). Suatu antrian yang panjang dapat merugikan pihak yang membutuhkan pelayanan karena terbuangnya waktu selama menunggu, kurangnya efisiensi kerja, keuntungan yang sedikit, bahkan dapat menimbulkan citra yang kurang baik di mata pelanggan (Hilda, dkk., 2018). Dengan demikian, pihak penyedia layanan seharusnya mengoptimalkan kinerjanya agar proses pelayanan tersebut berjalan secara efisien dan efektif.

Salah satu sistem antrian dapat ditemukan pada sistem pelayanan di suatu Rumah Sakit Umum (RSU) Yogyakarta. Rumah sakit ini merupakan salah satu rumah sakit yang memberikan pelayanan terbaik bagi para pasien di Daerah Istimewa Yogyakarta. Hal ini menyebabkan pengunjung rumah sakit semakin banyak, namun terbatasanya ketersediaan fasilitas dan pelayanan menyebabkan terjadinya antrian yang panjang. Panjangnya antrian mengakibatkan semakin lama pula waktu menunggu bagi para pengunjung. Oleh sebab itu, kinerja pelayanan di suatu RSU Yogyakarta perlu dioptimalkan dengan menganalisis perilaku dan kestabilan sistem antrian tersebut. Salah satu cara menganalisis perilaku dan kestabilan sistem antrian ini adalah dengan memodelkan sistem antrian menggunakan aljabar max-plus.

Aljabar max-plus merupakan suatu struktur aljabar dimana himpunan semua bilangan real $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi max dan plus (Farlow, 2011:1). Aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar berbagai masalah dalam sistem jaringan kereta api, penjadwalan dalam jaringan kerja, sistem produksi sederhana, dan jaringan antrian (Ruditho, 2016:1). Beberapa penulis telah menerapkan aljabar max-plus dalam berbagai hal diantaranya menjadwalkan angkutan perdesaan di Jombang (Rakhmawati & Febriyanti, 2017), memodelkan antrian sistem pelayanan pasien rawat jalan di rumah sakit Al Huda Genteng (Hardiyanti, dkk., 2017), mengestimasi waktu dan hasil analisis jadwal menggunakan pendekatan aljabar max-plus dari alur Petri net pada pelayanan pendaftaran ujian akhir semester di STKIP PGRI Pasuruan (Nurmalitasari & Rayungsari, 2018), dan memodelkan sistem antrian lalu lintas dengan satu underpass di Yogyakarta (Hurit & Ruditho, 2019).

Oleh sebab itu, penulis akan memodelkan sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS di suatu RSU Yogyakarta. Selanjutnya, model sistem antrian tersebut digambarkan diagramnya dengan menggunakan Petri net. Petri net merupakan sebuah graf bipartit berarah yang memiliki 2 node yang disebut sebagai *Place* dan *Transisi* (Wattimena, dkk., 2012). Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk menganalisis perilaku dan kestabilan pada sistem antrian pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS di suatu RSU Yogyakarta guna mengoptimalkan sistem pelayanan rumah sakit tersebut.

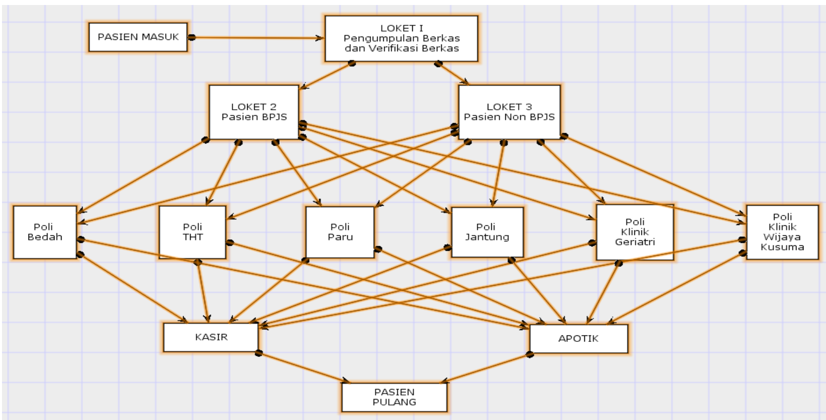
METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun tahapan penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) penulis mempelajari teori aljabar max-plus dan Petri net yang diaplikasikan dalam memodelkan dan menganalisis sistem antrian, (2) penulis mengumpulkan data tentang cara pelayanan pasien rawat jalan di suatu RSU Yogyakarta khususnya pasien BPJS yang dilakukan dengan cara mengamati dan mewawancara pasien, (3) penulis mengambarkan diagram sistem atrian dengan menggunakan Petri net; dan (4) penulis membuat model aljabar max-plus berdasarkan diagram Petri net yang telah dibuatkan penulis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem Antrian Pelayanan Pasien Rawat Jalan Suatu RSU di Yogyakarta

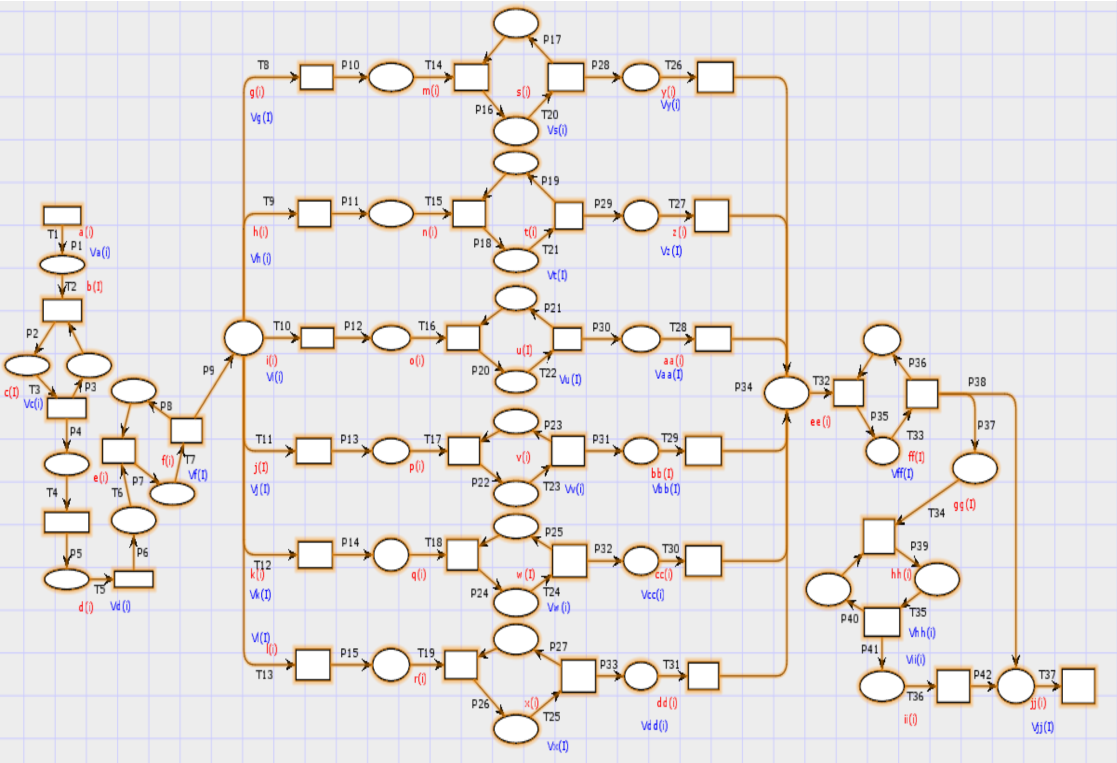
Berdasarkan pengamatan dan hasil wawancara penulis, sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS di suatu RSU Yogyakarta dapat dinyatakan pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. Alur Sistem Antrian Pelayanan Pasien BPJS Rawat Jalan di suatu RSU Yogyakarta

Model Aljabar Max-Plus Sistem Antrian Pelayanan Pasien BPJS Rawat Jalan di Suatu RSU Yogyakarta

Menurut Subiono (2015:129), pada Petri net yang mempertimbangkan waktu terdapat dua peubah yang digunakan dalam memodelkan aljabar max-plus yaitu peubah waktu dan peubah yang menunjukan lama waktu yang dibutuhkan tiap event. Berdasarkan alur sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS di suatu RSU Yogyakarta pada Gambar 1, maka dapat digambarkan model Petri net seperti pada Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2. Perti Net dengan Waktu Sistem Antrian Pelayanan Pasien BPJS Rawat Jalan di suatu RSU Yogyakarta

Keterangan:

$a(i)$: Waktu kedatangan pasien ke rumah sakit saat ke-i.

$b(i)$: Waktu mulai palayanan pegumpulan dan verifikasi berkas saat ke-i.

$c(i)$: Waktu selesai palayanan pengumpulan dan verifikasi berkas saat ke-i.

$d(i)$: Waktu pasien menuju antrian BPJS saat ke-i.

$ff(i)$: Waktu selesai pelayanan apotik saat ke-i.

$gg(i)$: Waktu mulai pelayanan kasir apotik saat ke-i.

$hh(i)$: Waktu selesai pelayanan kasir apotik saat ke-i.

$ii(i)$: Waktu pasien dari kasir menuju keluar rumah sakit saat ke-i.

$e(i)$: Waktu mulai pelayanan BPJS saat ke-i.
$f(i)$: Waktu selesai pelayanan BPJS saat ke-i.
$g(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli bedah saat ke-i.
$h(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli THT saat ke-i.
$i(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli paru saat ke-i.
$j(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli jantung saat ke-i.
$k(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli klinik geriatri saat ke-i.
$l(i)$: Waktu pasien menuju antrian pelayanan poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$m(i)$: Waktu mulai pelayanan poli bedah saat ke-i.
$n(i)$: Waktu mulai pelayanan poli THT saat ke-i.
$o(i)$: Waktu mulai pelayanan poli paru saat ke-i.
$p(i)$: Waktu mulai pelayanan poli jantung saat ke-i.
$q(i)$: Waktu mulai pelayanan poli klinik geriatri saat ke-i.
$r(i)$: Waktu mulai pelayanan poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$s(i)$: Waktu selesai pelayanan poli bedah saat ke-i.
$t(i)$: Waktu selesai pelayanan poli THT saat ke-i.
$u(i)$: Waktu selesai pelayanan poli paru saat ke-i.
$v(i)$: Waktu selesai pelayanan poli jantung saat ke-i.
$w(i)$: Waktu selesai pelayanan poli klinik geriatri saat ke-i.
$x(i)$: Waktu selesai pelayanan poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$y(i)$: Waktu pasien menuju antrian apotik dari poli bedah saat ke-i.
$z(i)$: Waktu pasien menuju antrian apotik dari poli THT saat ke-i.
$aa(i)$: Waktu pasien menuju antrian apotik dari poli paru saat ke-i.
$bb(i)$: Waktu asien menuju antrian apotik dari poli jantung saat ke-i.
$jj(i)$: Waktu pasien pulang saat ke-i.
$Va(i)$: Lama waktu kedatangan pasien ke rumah sakit saat ke-i.
$Vc(i)$: Lama waktu selesai palayanan pegumpulan dan verifikasi berkas saat ke-i.
$Vd(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian BPJS saat ke-i.
$Vf(i)$: Lama waktu selesai pelayanan BPJS saat ke-i.
$Vg(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli bedah saat ke-i.
$Vh(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli THT saat ke-i.
$Vi(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli paru saat ke-i.
$Vj(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli jantung saat ke-i.
$Vk(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli klinik geriatri saat ke-i.
$Vl(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian pelayanan poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$Vs(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli bedah saat ke-i.
$Vt(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli THT saat ke-i.
$Vu(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli paru saat ke-i.
$Vv(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli jantung saat ke-i.
$Vw(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli klinik geriatri saat ke-i.
$Vx(i)$: Lama waktu selesai pelayanan poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$Vy(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian apotik dari poli bedah saat ke-i.
$Vz(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian apotik dari poli THT saat ke-i.
$Vaa(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian apotik dari poli paru saat ke-i.
$Vbb(i)$: Lama waktu asien menuju antrian apotik dari poli jantung saat ke-i.
$Vcc(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian apotik dari poli klinik geriatri saat ke-i.
$Vdd(i)$: Lama waktu pasien menuju antrian apotik dari poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$Vff(i)$: Lama waktu selesai pelayanan apotik saat ke-i.

e-ISSN: 2775-2356

$cc(i)$: Waktu pasien menuju antrian apotik dari poli klinik geriatri saat ke-i.
$dd(i)$: Waktu pasien menuju antrian apotik dari poli klinik wijaya kusuma saat ke-i.
$ee(i)$: Waktu mulai pelayanan di apotik saat ke-i.
$Vhh(i)$: Lama waktu selesai pelayanan kasir apotik saat ke-i.
$Vii(i)$: Lama waktu pasien dari kasir menuju keluar rumah sakit saat ke-i.
$Vjj(i)$: Lama waktu pasien pulang saat ke-i.

Berdasarkan peubah-peubah yang telah diperoleh pada gambar aljabar max-plus tersebut, maka diperoleh model aljabar max-plus net terhadap waktu seperti berikut.

$$
\begin{aligned}
a(i) &= Va(i) \otimes a(i-1)\\
b(i) &= a(i) \oplus c(i-1)\\
&= (Va(i) \otimes a(i-1)) \oplus c(i-1)\\
c(i) &= Vc(i) \otimes b(i)\\
&= Vc(i) \otimes \big((Va(i) \otimes a(i-1)) \oplus c(i-1)\big)\\
&= \big(Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus (Vc(i) \otimes c(i-1))\\
d(i) &= Vd(i) \otimes c(i)\\
&= Vd(i) \otimes \Big(\big(Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus \big(Vc(i) \otimes c(i-1)\big)\Big)\\
&\quad \big(Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus \big(Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big)\\
e(i) &= \big(Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus \big(Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus (f(i-1))\\
f(i) &= \big(Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
g(i) &= \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
h(i) &= \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
i(i) &= \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
j(i) &= \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
k(i) &= \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
l(i) &= \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
m(i) &= \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\backslash\\
&\quad \oplus s(i-1)\\
n(i) &= \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
&\quad \oplus t(i-1)\\
o(i) &= \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big)\\
&\quad \oplus \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big)\\
&\quad \oplus u(i-1)
\end{aligned}
$$

Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 1, Nomor 2, Halaman 1–11
Juli 2021
e-ISSN: 2775-2356

$$
\begin{aligned}
p(i) &= \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
&\oplus v(i-1) \\
q(i) &= \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
&\oplus w(i-1) \\
r(i) &= \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
&\oplus x(i-1) \\
s(i) &= \big(Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vs(i) \otimes s(i-1)) \\
t(i) &= \big(Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vt(i) \otimes t(i-1)) \\
u(i) &= \big(Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vu(i) \otimes u(i-1)) \\
v(i) &= \big(Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus \big(Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes \\
&Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus \\
&(Vv(i) \otimes v(i-1)) \\
w(i) &= \big(Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vw(i) \otimes w(i-1)) \\
x(i) &= \big(Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vx(i) \otimes x(i-1)) \\
y(i) &= \big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes s(i-1)) \\
z(i) &= \big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \oplus \\
&\big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \oplus \big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes \\
&Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes t(i-1)) \\
aa(i) &= \big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes u(i-1)) \\
bb(i) &= \big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes v(i-1)) \\
cc(i) &= \big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes w(i-1)) \\
dd(i) &= \big(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
&\oplus \big(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big)
\end{aligned}
$$

$$\oplus \left(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\right) \oplus (Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes x(i-1))$$

$$\begin{aligned} ee(i) = {} & \Big(\big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vy(i) \otimes Vs(i) \\ & \otimes s(i-1))\Big) \\ & \oplus \Big(\big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \\ & \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vz(i) \otimes Vt(i) \\ & \otimes t(i-1))\Big) \\ & \oplus \Big(\big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \\ & \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vaa(i) \\ & \otimes Vu(i) \otimes u(i-1))\Big) \\ & \oplus \Big(\big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \\ & \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vbb(i) \otimes Vv(i) \\ & \otimes v(i-1))\Big) \\ & \oplus \Big(\big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \\ & \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vcc(i) \\ & \otimes Vw(i) \otimes w(i-1))\Big) \\ & \oplus \Big(\big(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \\ & \otimes a(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes c(i-1)\big) \\ & \oplus \big(Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vdd(i) \\ & \otimes Vx(i) \otimes x(i-1))\Big) \oplus (ff(i-1)) \end{aligned}$$

Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 1, Nomor 2, Halaman 1–11
Juli 2021
e-ISSN: 2775-2356

$$
\begin{aligned}
ff(i) = \Big(& (Vff(i) \otimes Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes Vg(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
& \oplus (Vff(i) \otimes Vy(i) \otimes Vs(i) \otimes s(i-1))\Big) \\
& \oplus \Big(\big(Vff(i) \otimes Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes Vh(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \oplus (Vff(i) \\
& \otimes Vz(i) \otimes Vt(i) \otimes t(i-1))\Big) \\
& \oplus \Big(\big(Vff(i) \otimes Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes Vi(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
& \oplus (Vff(i) \otimes Vaa(i) \otimes Vu(i) \otimes u(i-1))\Big) \\
& \oplus \Big(\big(Vff(i) \otimes Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes Vj(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
& \oplus (Vff(i) \otimes Vbb(i) \otimes Vv(i) \otimes v(i-1))\Big) \\
& \oplus \Big(\big(Vff(i) \otimes Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes Vk(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
& \oplus (Vff(i) \otimes Vcc(i) \otimes Vw(i) \otimes w(i-1))\Big) \\
& \oplus \Big(\big(Vff(i) \otimes Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes Va(i) \otimes a(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes Vd(i) \otimes Vc(i) \\
& \otimes c(i-1)\big) \\
& \oplus \big(Vff(i) \otimes Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes Vl(i) \otimes Vf(i) \otimes f(i-1)\big) \\
& \oplus (Vff(i) \otimes Vdd(i) \otimes Vx(i) \otimes x(i-1))\Big) \oplus (Vff(i) \otimes ff(i-1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
gg(i) &= ff(i) \oplus hh(i-1) \\
hh(i) &= \big(Vhh(i) \otimes ff(i)\big) \oplus (Vhh(i) \otimes hh(i-1)) \\
ii(i) &= \big(Vii(i) \otimes Vhh(i) \otimes ff(i)\big) \oplus (Vii(i) \otimes Vhh(i) \otimes hh(i-1)) \\
jj(i) &= ff(i) \oplus \big(Vii(i) \otimes Vhh(i) \otimes ff(i)\big) \oplus (Vii(i) \otimes Vhh(i) \otimes hh(i-1))
\end{aligned}
$$

Andaikan diberikan nilai dari beberapa peubah seperti berikut ini.

$Va(i) = 10$	$Vi(i) = 1$	$Vw(i)$=15	$Vcc(i) = 2$
$Vc(i) = 10$	$Vj(i) = 1$	$Vx(i) = 15$	$Vdd(i) = 3$
$Vd(i) = 5$	$Vk(i) = 1$	$Vy(i) = 20$	$Vff(i) = 20$
$Vf(i) = 10$	$Vl(i) = 1$	$Vz(i) = 2$	$Vhh(i) = 10$
$Vg(i) = 1$	$Vs(i) = Vt(i) = 20$	$Vaa(i) = 2$	$Vii(i) = 3$
$Vh(i) = 1$	$Vu(i) = Vv(i) = 20$	$Vbb(i) = 2$	$Vjj(i) = 2$

Selanjutnya, matriks aljabar max-plus dapat disajikan seperti berikut ini.

$$
\begin{bmatrix} a(i) \\ c(i) \\ f(i) \\ s(i) \\ t(i) \\ u(i) \\ v(i) \\ w(i) \\ x(i) \\ ff(i) \\ hh(i) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
35 & 25 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
56 & 46 & 31 & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
56 & 46 & 31 & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
56 & 46 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
56 & 46 & 31 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
51 & 41 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
51 & 41 & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\
96 & 86 & 51 & 60 & 42 & 42 & 42 & 37 & 38 & 20 & \varepsilon \\
106 & 96 & 61 & 70 & 52 & 52 & 52 & 47 & 48 & 30 & 10
\end{bmatrix}
\otimes
\begin{bmatrix} a(i-1) \\ c(i-1) \\ f(i-1) \\ s(i-1) \\ t(i-1) \\ u(i-1) \\ v(i-1) \\ w(i-1) \\ x(i-1) \\ ff(i-1) \\ hh(i-1) \end{bmatrix}
$$

Dengan demikian, penulis memperoleh suatu matriks sebagai hasil dari pemodelan sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan di suatu RSU Yogyakarta dengan menggunakan aljabar max-plus.

SIMPULAN

Sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan di suatu RSU Yogyakarta dapat dimodelkan dengan menggunakan aljabar max-plus. Hal ini dilakukan dengan cara penulis menggambarkan diagram sistem atrian dengan menggunakan Petri net berdasarkan data prosedur pelayanan pasien rawat jalan yang menggunakan BPJS di suatu RSU Yogyakarta. Selanjutnya, penulis membuat model aljabar max-plus berdasarkan diagram Petri net. Hasil penelitian ini berupa matriks dari suatu keadaan tertentu yang dapat digunakan oleh penulis selanjutnya guna menganalisis perilaku dan kestabilan pelayanan dalam mengoptimalkan sistem antrian pelayanan pasien rawat jalan di suatu RSU Yogyakarta.

Leibniz: Jurnal Matematika
Volume 1, Nomor 2, Halaman 1–11
Juli 2021
e-ISSN: 2775-2356

DAFTAR PUSTAKA

Farlow, K.G. 2009. Max-Plus Algebra. Master's Thesis. Virginia: Polytechnic Institute and State University.

Hardiyanti, S.A., Yuniwati, I., & Yustita, A.D. (2017). Bentuk petri net dan model aljabar max plus pada sistem pelayanan pasien rawat jalan Rumah Sakit Al Huda Genteng, Banyuwangi. Unisda Journal of Mathematics and Computer Science, 3 (2), 1–8.

Hilda, Kaseng, S., & Saleh, H.H.M. (2018). Analisis antrian pelayanan nasabah pada PT Bank Syariah Mandiri Cabang Bungku. Jurnal Ilmu Manajemen Universitas Tadulako, 4 (3), 201–210.

Hurit, R.U. & Rudhito, A. (2019). Max-plus algebraic modeling of three crossroad traffic queue systems with one underpass. Journal of Physics, 1307 (1), Article ID 012013.

Maure P. O. & Rudhito, A. M., (2019). Model Aljabar Max-Plus Pada Sistem Antrian Pelayanan Penerbitan Surat Izin Usaha Perdagangan Bahan Berbahaya. Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika, 1(2), 139–146.

Nurmalitasari, D. & Rayungsari, M. (2018). Model Aljabar Max Plus dan Petri Net Pada Sistem Pelayanan Pendaftaran Ujian Akhir Semester. AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 9 (2), 47–56.

Purwitaningsih, C. H & Putri, A. P. 2016. Penjadwalan Proses Produksi Topeng Batik Menggunakan Aljabar Max-Plus. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Rudhito, M.A. (2016). Aljabar max plus dan penerapannya. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma Press.

Subiono. 2015. Aljabar min-max plus dan terapannya. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Rakhmawati, N. & Febriyanti, R. (2017). Penerapan Aljabar Max-Plus Pada Permasalahan Penjadwalan Angkutan Perdesaan di Jombang. Jurnal Matematika “Mantik”, 03 (02), 51–56.

Wattimena, F.N., Pentury, T., & Lesnussa, Y.A. (2012). Aplikasi Petri net pada sistem pembayaran tagihan listrik PT PLN (Persero) Rayon Ambon Timur. Jurnal Barekeng, 6 (1), 23–30.